



Titre: Simulation numérique de la fabrication des composites par
injection-compression

Auteur: Xuan-Tan Pham
Author:

Date: 1999

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Pham, X.-T. (1999). Simulation numérique de la fabrication des composites par
injection-compression [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal].
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8758/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8758/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA FABRICATION
DES COMPOSITES PAR INJECTION-COMPRESSION

XUAN-TAN PHAM
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
JANVIER 1999



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-42828-1

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA FABRICATION
DES COMPOSITES PAR INJECTION-COMPRESSION

présentée par : PHAM Xuan-Tan

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. SANSCHAGRIN Bernard, D. Ing., président

M. TROCHU François, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. NGÔ Anh-Dung, Ph. D., membre

M. BRÉARD Joël, Doctorat, membre

À ma mère, ma fiancée Bich-Hà et ma famille

Remerciements

Cette étude a été réalisée au Centre de recherche appliquée sur les polymères de l'École Polytechnique de Montréal. L'auteur tient à remercier toutes les personnes qui ont collaboré de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Plus particulièrement, ces remerciements s'adressent à Monsieur François Trochu qui m'a bien dirigé avec enthousiasme et pour les conseils judicieux fournis tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier Messieurs Jean-François Remacle, Joël Bréard et Yanik Benoit avec lesquels j'ai eu l'opportunité de travailler dans l'équipe de recherche du CRASP. Ils m'ont beaucoup encouragé à travers de précieuses discussions, particulièrement avec M. Bréard pour les problèmes de la mécanique des milieux poreux et avec M. Remacle pour les méthodes numériques.

Mes remerciements vont également au ministère de l'Éducation du gouvernement du Québec et au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour leurs aides financières.

Je tiens à remercier Messieurs Bernard Sanschagrin, François Trochu, Anh-Dung Ngô, Joël Bréard, pour avoir accepté d'être membres du jury, et M. Pierre Carreau, pour avoir accepté d'être représentant du doyen.

Finalement, je voudrais remercier ma mère, ma fiancée Bich Hà et ma famille pour leur patience et leur amour.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier les procédés de mise en forme des composites par injection-compression tels que le moulage par transfert de résine avec compression (CRTM) et la vessie. Ce travail comprend deux aspects : théorique et numérique. D'abord, une étude théorique sur le problème de consolidation a été réalisée par application de la mécanique des milieux poreux déformables afin de mettre en évidence des équations gouvernant les phénomènes physiques ayant lieu dans ces procédés. Ensuite, les modèles mathématiques pour le procédé CRTM et la vessie sont dérivés des équations générales de la consolidation. La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre ces équations. Un algorithme numérique de résolution original permet de simuler la progression des procédés par une procédure de calcul pas-à-pas. Un nouveau module de calcul appelé compression a été développé en langage C++ avec une programmation orientée objet et implémenté dans le logiciel LCMFLOT afin d'effectuer les simulations numériques des procédés en question. Le point important dans ces procédés par rapport aux autres procédés classiques comme le procédé RTM est l'effet de la compression. Grâce à la compression, la pression de la résine est plus importante; la résine avance plus facilement et plus rapidement; l'épaisseur finale du produit est plus uniforme; la qualité de la pièce composite est plus homogène et ses caractéristiques mécaniques sont meilleures. Avec l'outil informatique mentionné ci-dessus, l'utilisateur peut alors réaliser une simulation numérique en choisissant une combinaison de paramètres physiques du procédé afin d'obtenir un choix optimum des paramètres gouvernant le procédé.

Abstract

The objective of this thesis is to study the liquid composite molding processes by injection-compression such as the compression resin transfer molding (CRTM) and the flexible bladder process. This work involves both theoretical and numerical aspects. Firstly, a theoretical study about the consolidation has been done by using the theory of mechanics of porous medium in order to set up the equations governing in these processes. Then, mathematical models for CRTM process and flexible bladder process are derived from the equations of the consolidation. The finite element method has been used to solve these equations. A numerical algorithm of resolution allows the simulation of these processes by a step-by-step procedure. A new modul of calculation called compression has been developped in the object oriented laguage C++ and implemeted in the software LCMFLOT to realize numerical simulations of the processes above mentioned. The important point in these processes in comparison to classical process such as RTM is the effect of the compression. With the compression, the resin pressure is higher; the resin advance more easely and quickly; the final thickness in the product is more uniform; the quality of the composite part is more homogeneous and its mechanical resistance is better. This software allows users to realize numerical simulations in chosing differently physical parameters in order to obtain a best set of parameters for the process.

Table des matières

Dédicace.....	iv
Remerciements.....	v
Résumé.....	vi
Abstract.....	vii
Table des matières.....	viii
Liste des tableaux.....	xiii
Liste des figures.....	xv
Liste des signes et abréviations.....	xxii
Liste des annexes.....	xxv
 Introduction.....	 1
 Chapitre 1 : Revue bibliographique.....	 5
1.1 Introduction.....	5
1.2 Écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux.....	5
1.3 Perméabilité d'un milieu poreux.....	8
1.4 Écoulement non permanent à surfaces libres.....	11
1.5 Modélisation de l'écoulement de la résine du procédé RTM.....	14
1.6 Compaction et consolidation.....	17
1.6.1 Revue sur la compaction.....	17
1.6.2 Études analytiques de la consolidation et méthodes de résolution.....	26
1.6.2.1 Théorie de la consolidation de Biot.....	27
1.6.2.2 Théorie de la consolidation de Rendulic.....	29
1.6.2.3 Théorie de la consolidation de Terzaghi.....	29
1.6.2.4 Équations générales de la consolidation.....	30
1.6.2.5 Résolution du système de Biot par la méthode des éléments finis.....	32

• Modèle de Sandhu.....	32
• Modèle de Christian.....	33
• Modèle de Belkeziz et Magnan.....	35
1.6.2.6 Étude de la consolidation de Gutowski et al.....	38
1.7 Conclusion.....	38

Chapitre 2 : Simulation of Compression Resin Transfer Molding with

Displacement Control.....	40
2.1 Présentation du chapitre.....	40
2.2 Abstract.....	41
2.3 Introduction.....	42
2.4 Consolidation theory.....	44
2.4.1 Resin Flow.....	45
2.4.2 Terzaghi's Relation.....	46
2.4.3. Continuity Equation.....	46
2.5 Compaction of the preform.....	47
2.6 Permeability of the fiber reinforcement.....	48
2.7 Injection with compression by displacement of the upper part of the mold.....	49
2.7.1 Numerical Algorithms.....	50
2.7.1.1 Simulation.....	51
2.7.1.2 Presimulation.....	52
2.7.2 Finite Element Method for Two-Dimensional CRTM.....	55
2.7.2.1 Variational Formulation of the Continuity Equation.....	55
2.7.2.2 Finite Element Method.....	56
2.7.2.3 Discretization with 3 Nodes Non Conforming Triangle.....	57
2.8 Numerical tests.....	58
2.9 Results and discussions.....	62
2.10 Conclusion and perspectives.....	67
2.11 Nomenclature.....	68

2.12 Acknowledgements.....	70
2.13 References.....	70

Chapitre 3 : Simulation of Compression Resin Transfer Molding to

Manufacture Thin Composite Shells.....	75
3.1 Présentation du chapitre.....	75
3.2 Abstract.....	76
3.3 Introduction.....	77
3.4 Consolidation theory.....	79
3.4.1 Resin flow.....	79
3.4.2 Terzaghi's relation.....	80
3.4.3 Equilibrium equation.....	80
3.4.4 Continuity equation.....	81
3.5 Mechanical behavior of the preform.....	82
3.6 Numerical model.....	83
3.6.1 Numerical algorithm.....	84
3.6.2 Finite element method.....	85
3.6.2.1 Variational formulation of the continuity equation.....	86
3.6.2.2 Finite element method.....	86
3.6.2.3 Discretization with 3 nodes triangular shell elements.....	87
3.7 One dimensional analysis.....	89
3.7.1 Objectives.....	89
3.7.2 Analysis of the model.....	89
3.7.2.1 Resin flow.....	91
3.7.2.2 Admissible compaction speed.....	92
3.7.2.3 Effect of compaction on the resin pressure.....	94
3.7.2.4 Analysis of CRTM process variants.....	97
3.8 Validation of the model.....	99
3.8.1 Test case 1.....	99

3.8.1.1 Description of the experiments.....	100
3.8.1.2 Numerical simulations.....	101
3.8.1.3 Results and discussion.....	102
3.8.2 Test case 2.....	107
3.8.2.1 Numerical simulations.....	108
3.8.2.2 Results and discussion.....	109
3.8.3 Test case 3.....	112
3.8.3.1 Numerical simulations.....	113
3.8.3.2 Results and discussion.....	113
3.9 Conclusion.....	118
3.10 Acknowledgements.....	120
3.11 Nomenclature.....	120
3.12 References.....	121

Chapitre 4 : Analysis of the Consolidation in Flexible Bladder Process for

Thin Composite Parts by Finite Element Method.....	124
4.1 Présentation du chapitre.....	124
4.2 Abstract.....	125
4.3 Introduction.....	126
4.4 Consolidation theory.....	129
4.5 Mechanical behavior of the reinforcement.....	131
4.6 Consolidation model.....	134
4.7 Numerical model.....	136
4.7.1 Process description.....	136
4.7.2 Numerical algorithm.....	136
4.7.3 Finite element method.....	137
4.7.3.1 Variational formulation.....	137
4.7.3.2 Finite element formulation.....	138
4.7.3.2.1 Space discretization.....	138

4.7.3.2.2 Time discretization.....	138
4.8 One-dimensional problem.....	139
4.8.1 Analysis.....	139
4.8.2 Simplified analytical solution.....	140
4.8.3 Finite difference method.....	142
4.8.4 Finite element simulations.....	142
4.8.5 Results and discussion.....	144
4.9 Square test case.....	146
4.9.1 Objective.....	146
4.9.2 Numerical simulations.....	147
4.9.3 Results and discussion.....	148
4.10 Thin shell case.....	159
4.10.1 Numerical simulations.....	159
4.10.2 Results and discussion.....	161
4.11 Conclusion.....	168
4.12 Nomenclature.....	169
4.13 Acknowledgements.....	170
4.14 References.....	171
 Conclusion et perspectives.....	 173
Bibliographie.....	180

Liste des tableaux

Table 2.1. Interpolation functions of the non conforming triangle with 3 nodes.....	57
Table 2.2. Simulation parameters of RTM and CRTM tests.....	61
Table 2.3. Simulation filling times and maximum resin pressure.....	64
Table 2.4. Maximum pressure comparison between the 2D numerical model and the 1D analytical solution for $K_z/K_x = 1/100$	65
Table 3.1. Interpolation functions of the non conforming and conforming triangles with 3 nodes.....	88
Table 3.2. Resin flow rates for pressure driven and flow rate controlled injections.	92
Table 3.3. Admissible maximum values of the compaction speed U_0	93
Table 3.4. Maximum resin pressure, resin pressure gradient on the front and total resin force, with $M = U \mu / h K_x$	97
Table 3.5. Different stages in CRTM process.....	98
Table 3.6. Initial and final volume ratios of the reinforcements.....	113
Table 3.7. Filling times of simulations with an injection pressure $p = 0.2$ MPa.....	114
Table 4.1. Dimensions of the square.....	146

Table 4.2. Reinforcement parameters.....	147
Table 4.3. Simulations results in the square geometry.....	153
Table 4.4. Simulations results in the small square geometry.....	158
Table 4.5. Simulations results in the thin shell.....	166
Table 4.6. Simulations results in the smaller thin shell.....	167

Liste des figures

Figure 1.1. Courbes de compaction (d'après Robitaille [85]).....	22
Figure 1.2. Conditions aux limites sur le squelette.....	35
Figure 1.3. Conditions aux limites sur le fluide.....	35
Figure 2.1. Schematics of the CRTM process.....	42
Figure 2.2. Numerical schematics of mold cavity with a regular triangular mesh....	50
Figure 2.3. Numerical algorithm for the simulation of the CRTM process.....	53
Figure 2.4. Numerical algorithm for the presimulation of the CRTM process.....	54
Figure 2.5. Two-dimensional non conforming triangle with 3 nodes.....	57
Figure 2.6. Dimensions of the cavity.....	58
Figure 2.7. Permeability curves for the mat 750 (Unifilo random glass U750).....	59
Figure 2.8. Permeability curves for the mat 400.....	60
Figure 2.9. Permeability curves for fabrics JB81053 and JB82675 (J.B Martin Co.).....	60
Figure 2.10. Boundary conditions (a) during the injection phase; (b) during the compression phase.....	61

Figure 2.11. Comparison of resin pressure distribution between RTM and CRTM simulations for the mat 750.....	62
Figure 2.12. Comparison of resin pressure distribution between RTM and CRTM simulations for the mat 400.....	63
Figure 2.13. Pressure comparison between the 2D numerical model and the 1D analytical model (Mat 750 and Mat 400 with the velocity $U = 0.4$ mm/s and $K_z/K_x = 1/100$).....	66
Figure 2.14. Pressure comparison between the 2D numerical model and the 1D analytical model (Mat JB 81053 and JB 82675 with the velocity $U = 0.4$ mm/s and $K_z/K_x = 1/100$).....	66
Figure 3.1. Schematics of the CRTM process.....	77
Figure 3.2. Schematics of the CRTM process for a composite shell.....	83
Figure 3.3. Mesh of the part.....	84
Figure 3.4. Compaction speed U_n of each element.....	85
Figure 3.5. Thin shell triangular element.....	88
Figure 3.6. Schematics of resin mass conservation.....	91
Figure 3.7. Admissible zone of the compaction velocity U	93

Figure 3.8. Pressure curves with U_0 in the admissible zone (data 1) and with U_0 out of the admissible zone (data 2).....	94
Figure 3.9. Resin pressure distributions in the cavity over the saturated length.....	96
Figure 3.10. Resin pressure distributions in the cavity over the saturated length.....	96
Figure 3.11. Four variants of the CRTM process.....	99
Figure 3.12. Schematics of the frame cavity with sensor locations on the bottom plate (from Wirth et al. [4]).....	100
Figure 3.13. Permeability curve of the reinforcement OCF8610.....	101
Figure 3.14. Finite element discretization of the cavity: (a) regular mesh 4x9, (b) regular mesh 4x20 and (c) non regular mesh.....	102
Figure 3.15. Comparison of saturated length over time.....	103
Figure 3.16. Comparison of pressure distribution: (a) experimental and analytical results and (b) numerical and analytical results.....	104
Figure 3.17. Comparison of pressure distribution in numerical simulations performed with regular and non regular meshes: (a) location P1 ; (b) location P2 ; (c) location P3.....	106
Figure 3.18. Circular geometry of the two-dimensional model problem.....	107

Figure 3.19. Finite element discretization of the quarter of circle: (a) regular mesh, (b) non regular mesh.....	108
Figure 3.20. Pressure distribution in the quarter of circle during the CRTM process.....	109
Figure 3.21. Resin velocity on the flow front: (a) injection phase, (b) compression phase.....	110
Figure 3.22. Saturated radius in function of time.....	111
Figure 3.23. Comparison of the resin pressure over saturated radius.....	112
Figure 3.24. Curve thin composite part: (a) mesh, (b) sensor locations.....	112
Figure 3.25. The resin velocity: (a) injection phase, (b) compression phase.....	115
Figure 3.26. Pressure distribution for simulation I-C/CRTM 7.....	116
Figure 3.27. (a) Resin velocity, (b) pressure distribution in simulation I-C/CRTM 7; and (c) resin velocity in I-C/CRTM 8.....	118
Figure 4.1. Schematics of the flexible bladder process: (a) initial configuration, (b) deformed configuration.....	127
Figure 4.2. Deformation of the reinforcement in compaction.....	133
Figure 4.3. Compaction curve for fabric NCS 81053.....	134

Figure 4.4. Schematics of thin composite consolidation.....	135
Figure 4.5. Thin shell composite part.....	137
Figure 4.6. One-dimensional consolidation.....	140
Figure 4.7. Regular triangular mesh of the square.....	143
Figure 4.8. Permeability curve for fabric NCS 81053 (K_x and K_y).....	143
Figure 4.9. Comparison of results for the one-dimensional simplified case.....	145
Figure 4.10. Sensor positions for square tests.....	147
Figure 4.11. Simulation 1 in autoclave.....	149
Figure 4.12. Pressure distribution of simulation 1: (a) at 10 sec., (b) at 21 sec.....	150
Figure 4.13. Simulation 2 in autoclave.....	151
Figure 4.14. Pressure distribution of simulation 2: (a) at 10 sec., (b) at 21 sec.....	152
Figure 4.15. Simulations 3 and 4 in autoclave.....	154
Figure 4.16. Simulations 5 and 6 under vacuum.....	155
Figure 4.17. Simulation 7 in autoclave.....	157
Figure 4.18. Simulations 8 and 9 under vacuum.....	159

Figure 4.19. Geometry of the thin shell and positions of the sensors.....	160
Figure 4.20. Simulation 10 in autoclave.....	162
Figure 4.21. Pressure distribution of simulation 10: (a) at 50 sec., (b) at 200 sec....	163
Figure 4.22. Simulation 11 in autoclave.....	164
Figure 4.23. Pressure distribution of simulation 11: (a) at 20 sec., (b) at 40 sec.....	165
Figure I.1. Schematics of the deformation of a saturated porous medium.....	195
Figure II.1. Schematics of the one-dimensional consolidation problem.....	202
Figure III.1. A circular cavity in cylindrical coordinate system.....	205
Figure IV.1. Directions du renfort tissu.....	212
Figure IV.2. Conditions aux limites du problème de la consolidation pendant la compression : (a) déplacement, (b) force F, (c) pression.....	217
Figure IV.3. Domaine Ω et ses conditions aux limites $\partial\Omega_1 = \Gamma_r \cup \Gamma_u \cup \Gamma_g$, $\partial\Omega_2 = \Gamma_p \cup \Gamma_v \cup \Gamma_q$	218
Figure IV.4. (a) Fonction d'interpolation associée au nœud k (b) Fonction d'interpolation associée à Γ_q	221

Figure IV.5. Cas de condition de Dirichlet

(a) pression de la résine, (b) vitesse de la résine et	
(c) déplacement du renfort.....	226

Figure IV.6. Cas de condition de Neumann

(a) pression de la résine, b) vitesse de la résine et	
(c) déplacement du renfort.....	226

Figure IV.7. Cas de condition de Force Globale

(a) pression de la résine, (b) vitesse de la résine et	
(c) déplacement du renfort.....	226

Figure V.1. Écoulement couplé espace libre/milieu poreux..... 230**Figure V.2. Frontière du domaine de calcul..... 234**

Liste des sigles et abréviations

- \bar{A} fraction de volume de fibres à pression unitaire de compaction
 \bar{B} indice de rigidité de compaction
 B_{ij} matrice des dérivées des fonctions d'interpolation ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 C constante de Kozeny
 \bar{C} paramètre indiquant la chute de pression dans la relaxation du renfort
 C_c constante de compression
 \bar{D} paramètre représentant la concavité de la courbe de relaxation
 D_{ij} matrice de taux de déformation ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 D_α zone complètement saturée de résine
 E tenseur d'élasticité
 E_{ijkl} tenseur d'élasticité ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$)
 \bar{E} constante d'élasticité des renforts
 \bar{E}_0 constante d'élasticité des renforts en régime linéaire
 $F(x, t)$ fonction de pseudo-concentration pour la forme du front
 F_α zone partiellement saturée de résine
 F_{ij} matrice de gradient de déformation ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$)
 G_{ij} matrice de gradient de vitesse de déformation ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 H charge hydraulique
 J déterminant de la matrice de gradient de déformation
 K perméabilité en général
 \mathbf{K} tenseur de perméabilité du milieu poreux
 \mathbf{K}^* matrice de rigidité
 K_i composantes principales de la matrice de perméabilité ($i = 1, 2, 3$)
 K_{ml} matrice de perméabilité ($m = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$)
 N_j fonctions d'interpolation ($j = 1, 2, 3 \dots$)
 Re nombre de Reynolds
 U vitesse de la partie supérieure du moule

- U_n vitesse normale de la compression
 V_f taux de fibre
 V_{f_0} taux de fibre à pression ambiante
 $V_{f_{cont}}$ taux de fibre caractérisant la transition du régime de compaction linéaire
 V_{f_m} taux de fibre maximum théorique
 $V_{f_{moy}}$ taux de fibre moyen
 V_v volume vide
 W_{ij} matrice de taux de rotation ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 X ratio de vide
 d_p diamètre moyen de la section
 dV volume élémentaire dans la configuration initiale
 dv volume élémentaire dans la configuration déformée
 \vec{e}_i vecteurs de base du système de coordonnées ($i = 1, 2, 3$)
 f facteur de remplissage
 f_i vecteur de force massique
 f_{ij} matrice de gradient de déplacement ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 g gravité
 $h(t)$ épaisseur du renfort à temps t
 p pression du fluide
 \hat{p} fonctions test de pression
 p_j valeurs de pression aux degrés de liberté ($j = 1, 2, 3 \dots$)
 \vec{u} vecteur de déplacement de la particule du solide
 v vitesse du fluide en général
 \vec{v}^f vitesse absolue de la particule du fluide
 v_n vitesse normale du fluide
 \vec{v}^r vitesse interstitielle de la particule du fluide
 \vec{v}^d vitesse de Darcy du fluide
 \vec{v}^s vitesse de la particule de la fibre
 x_m système de coordonnées ($m = 1, 2, 3$)

- $\bar{w}(x, t)$ débit massique du fluide
- Φ potentiel du fluide
- Γ frontière du domaine de calcul
- Γ_0 partie de la frontière où la condition v_n est spécifiée
- Γ_1 partie de la frontière où une pression donnée est imposée
- Ω domaine de calcul
- β_v compressibilité du volume de vide
- δ_{ij} matrice unitaire ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- ε_{vol} dilatation volumique
- $\dot{\varepsilon}_{ij}$ matrice de taux de déformation ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- η viscosité cinématique du fluide
- μ viscosité dynamique du fluide
- ν coefficient de Poisson
- ρ masse spécifique en général
- ρ^f masse spécifique du fluide
- ρ^s masse spécifique du solide
- σ_{ij} matrice de contrainte totale ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- σ'_{ij} matrice de contrainte effective dans le renfort ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- σ_{oct} contrainte sphérique
- ω porosité du milieu poreux
- ω_0 porosité initiale du milieu poreux
- ω_f porosité finale du milieu poreux
- $\dot{\omega}_{ij}$ matrice de taux de rotation ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)

Liste des annexes

Annexe I : Consolidation of a deformable saturated fiber reinforcement.....	195
Annexe II : 1D analytical solution of the consolidation problem.....	202
Annexe III : Analysis of the CRTM process in cylindrical coordinates.....	205
Annexe IV : Étude de la résolution des équations de la consolidation par la méthode des éléments finis.....	211
Annexe V : Modèle d'écoulement couplé espace libre/milieu poreux.....	229

Introduction

Les applications des matériaux composites à matrice polymère sont de plus en plus nombreuses dans plusieurs domaines. Les exigences requises par les industries qui mettent en place ces applications ont donné lieu au développement de différents types de procédés de mise en œuvre. Le RTM est une technique de mise en forme de pièces composites à matrice thermodurcissable renforcée par un matériau fibreux. Il consiste en l'injection à basse pression d'une résine de faible viscosité dans la cavité d'un moule contenant une préforme fibreuse sèche. Quand le moule est rempli par la résine, la pièce est cuite, puis démoulée. Le RTM a fait l'objet de recherches intensives dans le domaine de l'aéronautique et chez les constructeurs automobiles. Une limitation actuelle du procédé RTM est le taux de fibre relativement faible des pièces moulées. On a observé dans le procédé RTM, la formation de zones sèches quand le taux de fibre est élevé. Très récemment, une nouvelle technique appelée moulage par transfert de résine avec compression CRTM ("Compression Resin Transfer Molding") est apparue. Ce procédé consiste à injecter une quantité déterminée de résine de faible viscosité dans la cavité d'un moule contenant une préforme fibreuse sèche; ensuite tout le système résine-renfort est comprimé par une paroi mobile du moule. Quand le moule est rempli complètement par la résine, la pièce est cuite et démoulée. L'intérêt de cette méthode est la réalisation d'un produit de meilleure qualité : plus uniforme, plus homogène avec un taux volumique de fibres plus élevé et une meilleure résistance mécanique. La nouveauté du CRTM par rapport au RTM est bien sûr la phase de compression. On peut trouver aussi cette compression du renfort dans un autre procédé bien connu en industrie : le procédé de la vessie où un renfort saturé de résine est comprimé sous l'action d'une pression via un sac flexible. Ces techniques sont actuellement étudiées par plusieurs centres de recherche. Elles permettent la fabrication de pièces composites plus performantes.

Pendant de nombreuses années, la plupart des développements des procédés de mise en forme des composites tels que le RTM, le CRTM ou la vessie ont été étudiés expérimentalement. Le design des pièces composites et une conception des moules ont souvent été réalisés par essais-erreurs. Il est coûteux et long d'ajuster les outils et les paramètres du procédé en vue d'obtenir une qualité acceptable du produit final. C'est pourquoi, nous avons vu apparaître dans les bureaux d'études des logiciels de simulation sur ces divers procédés. Un modèle mathématique décrivant l'écoulement de la résine dans un milieu poreux déformable du renfort peut décrire les phénomènes physiques et chimiques ayant lieu au cours du procédé tels que l'avancement du front de résine, la consolidation, le transfert de la chaleur et les réactions chimiques. Ceci constitue un outil de prédiction efficace pour les concepteurs avant fabrication de la pièce. La simulation donne au concepteur des informations importantes : (i) la forme du front de résine lors du remplissage de la pièce, (ii) la distribution de pression de la résine pendant l'injection ou la compression, (iii) l'évolution de l'épaisseur de la préforme. De plus, la simulation numérique permet d'optimiser des procédés en choisissant différents régimes d'injection et de compression, ou différentes conditions aux limites.

La modélisation numérique des procédés CRTM et de la vessie en condition isotherme est le principal objectif de cette thèse. Ces procédés comprennent plusieurs phénomènes physiques. Cependant, les problèmes thermiques et chimiques ne feront pas partie de cette recherche. Seuls les phénomènes liés à la compressibilité des renforts seront étudiés. Les procédés sont donc traités ici comme un problème isotherme, ce qui correspond à un grand nombre de cas pratiques. Nous supposons que la polymérisation de la résine n'aura lieu qu'à la fin de la phase de mise en forme et qu'il n'y a pas d'échanges thermiques. Les problèmes sont donc uniquement d'ordre mécanique. Il s'agit de l'écoulement de la résine dans le milieu poreux déformable et de la déformation de ce milieu sous l'action de la compression. La loi d'écoulement de la résine dans les renforts fibreux déformables, la loi de comportement en compaction des renforts et

l'algorithme de remplissage seront les éléments essentiels de la modélisation des procédés de mise en forme des composites par injection-compression.

Dans cette thèse, la méthode des éléments finis est utilisée pour les simulations numériques. Un module de calcul est écrit en langage C++ avec une programmation orientée objet. Ce module, nommé compression, est implémenté dans le logiciel LCMFLOT en vue de simuler les procédés CRTM et de la vessie.

Cette thèse est présentée sous la forme d'une thèse par articles. Dans un premier temps, l'étude bibliographique présentée dans le chapitre 1 a pour objectif de répertorier les phénomènes physiques importants ayant lieu dans des procédés de mise en forme des composites, particulièrement le problème de la consolidation.

L'objectif du chapitre 2 est d'étudier la mise en forme des matériaux composites par le procédé de moulage par transfert de résine avec compression (CRTM). Cette étude est présentée sous la forme d'un article intitulé "*Simulation of Compression Resin Transfer Molding with Displacement Control*". Dans cet article, une étude synthétique sur la théorie de la mécanique des milieux poreux déformables est réalisée. Le phénomène physique fondamental du problème est la consolidation dont les équations sont décrites pour modéliser l'écoulement de la résine dans les renforts fibreux déformables. Seul le procédé de moulage par transfert de résine avec compression en contrôle de déplacement est analysé dans cette étude. Un algorithme de remplissage est construit pour l'avancement du front de résine dans un renfort déformable.

Basé sur les résultats obtenus dans l'étude du chapitre précédent, le chapitre 3 est concentré particulièrement sur l'analyse du procédé CRTM en contrôle de déplacement pour fabriquer des pièces composites minces. Cette étude est écrite pour le deuxième article intitulé "*Simulation of Compression Resin Transfer Molding to Manufacture Thin Composite Shells*". Une pièce composite de géométrie quelconque peut être simulée avec

plusieurs paramètres physiques différents. Les influences de la vitesse de compression, des choix sur les conditions aux limites, du comportement mécanique et de la perméabilité du renfort sont étudiées.

Ensuite, nous présentons dans le chapitre 4 le troisième article intitulé "*Analysis of the Consolidation in Flexible Bladder Process for Thin Composite Parts by Finite Element Method*". Dans cet article, le procédé de la vessie est étudié. La consolidation du renfort sous l'action d'une pression variant dans le temps est analysée. La distribution de la pression de la résine, l'évolution de l'épaisseur de la préforme et le temps nécessaire pour obtenir une épaisseur uniforme sont les paramètres les plus importants analysés dans cette étude.

Enfin, le dernier chapitre résume les contributions scientifiques de cette thèse dans le domaine de la fabrication des composites. Les hypothèses choisies dans les différents modèles développés dans cette thèse sont discutées, ainsi que les perspectives qui orientent de nouvelles directions de recherches pour l'avenir. Deux actions importantes qui ont eu des relations très étroites avec les problèmes étudiés dans cette thèse sont analysées dans les annexes IV et V.

Chapitre 1

Revue bibliographique

1.1 INTRODUCTION

La technique de fabrication des pièces composites implique les aspects principaux suivants : la compaction du renfort, l'écoulement de la résine dans le milieu poreux, le transfert de chaleur et la polymérisation. Quant au procédé RTM, la qualité des pièces produites par cette technique dépend non seulement de la résine et de la préforme, mais aussi du remplissage de la résine dans le moule qui est gouverné par la loi d'écoulement de Darcy. Parmi les paramètres qui influencent l'écoulement de la résine, on note la géométrie du moule, la viscosité (qui peut varier avec le temps), les températures du moule et de la résine, la configuration des ports d'injection et d'évents et la perméabilité du renfort. Dans ce qui suit, on s'intéresse seulement aux facteurs qui interviennent dans la modélisation du procédé CRTM isotherme.

1.2 ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE À TRAVERS UN MILIEU

POREUX

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux a été étudié depuis très longtemps dans le domaine de la mécanique des sols (Bear, 1972; Coussy, 1991). On peut le trouver aussi dans des domaines tels que l'hydrogéologie (Schneebeli, 1996), la pétrologie (Houbert, 1957). Plus tard, dès l'apparition des applications des matériaux composites, l'écoulement de la résine dans un renfort fibreux est étudié comme un cas particulier d'écoulement en milieu poreux.

Darcy (1856) a le premier proposé une loi qui caractérise l'écoulement permanent de l'eau à travers le sable. Cette loi très connue est appelée loi de Darcy. Sa forme généralisée est la suivante :

$$\bar{v}^r = -\frac{\mathbf{K}}{\omega\mu} \tilde{\nabla}\Phi, \quad (1.1)$$

où \bar{v}^r est la vitesse réelle ou interstitielle du fluide, \mathbf{K} est le tenseur de perméabilité, ω est la porosité du milieu poreux, μ est la viscosité du fluide et Φ est le potentiel du fluide

$$\Phi = p + \rho g z, \quad (1.2)$$

où ρ est la densité du fluide, g la gravité, p la pression du fluide et z la variable d'espace dans la direction de la gravité. Dans le cas où l'effet de la gravité est négligeable, l'équation (1.1) devient

$$\bar{v}^r = \frac{\mathbf{K}}{\omega\mu} (-\tilde{\nabla}p). \quad (1.3)$$

D'autres auteurs ont utilisé une autre forme avec la vitesse de Darcy \bar{v}^d au lieu de la vitesse réelle \bar{v}^r (c'est-à-dire le débit volumique par unité d'aire)

$$\bar{v}^d = \frac{\mathbf{K}}{\mu} (-\tilde{\nabla}p). \quad (1.4)$$

On peut voir que $\bar{v}^d = \omega \bar{v}^r$. De plus, cet écoulement doit respecter la loi de conservation de la masse de la résine :

$$\nabla(\rho \bar{v}^r \omega) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) = 0 \quad (1.5)$$

Finalement, l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est gouverné par la loi de Darcy et l'équation de continuité (1.5). L'application de la loi de Darcy pour l'écoulement d'une résine relativement peu visqueuse dans un renfort fibreux a été validée par plusieurs auteurs (Bréard, 1997; Ferland et al., 1994; Gauvin et al., 1996;

Trochu et al., 1993). Mais cette loi n'est pas toujours valide. D'après Beavers et Sparrow (1969), elle s'applique pour l'écoulement dans un milieu poreux si l'écoulement est laminaire et la force d'inertie est négligeable. Quand la vitesse est grande, la loi de Darcy n'est plus valide car les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Dans ce cas, l'auteur a utilisé une relation proposée par Muskat en 1937

$$\frac{dp}{dx} = a\mu v + b\rho v^2 \quad (1.6)$$

où a et b sont des constantes pour un milieu donné, μ est la viscosité, ρ la densité, v la vitesse et p la pression du fluide. Le membre de droite se compose de deux termes : un terme visqueux et un terme d'inertie. En fait, cette forme est identique à l'équation de Forchheimer (Dullien, 1979) qui est dérivée de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide stationnaire, newtonien, en écoulement laminaire avec des propriétés physiques constantes et des forces volumiques négligeables :

$$\nabla p = a\mu v + b\rho v^2 \quad (1.7)$$

Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur le domaine de validité de la loi de Darcy et ces travaux sont bien résumés par Bear (1972) et par Lebrun (1995). Ces travaux sont fondés sur la détermination d'un nombre de Reynolds, défini comme suit, $Re = vK^{1/2} / \eta$ où v est la vitesse du fluide, K la perméabilité du milieu poreux et η la viscosité cinématique du fluide. Les auteurs définissent ainsi trois régimes d'écoulement : le régime Darcien pour $Re < 1$, le régime laminaire non-Darcien pour lequel les forces d'inertie du fluide ne sont pas négligeables (Re variant de 10 à 100) et le régime turbulent pour $Re > 100$. Les procédés RTM, CRTM et SRIM ont généralement un nombre de Reynolds inférieur à 1. Par exemple, une injection par le procédé SRIM, réalisée chez Ford par Wirth (1995), se déroule avec une vitesse constante de la résine $v = 15$ cm/s. La densité de la résine ρ est de 1162 kg/m^3 et sa viscosité dynamique μ est de 0.1 Pa.s . La perméabilité du renfort K est de $0.2\text{E-}09 \text{ m}^2$. Alors, le nombre de Reynolds Re est de 0.025 . Cette valeur est quarante fois plus petite que 1, donc l'écoulement se produit dans le régime Darcien, c'est-à-dire qu'il pourrait être caractérisé par une loi de Darcy linéaire.

1.3 PERMÉABILITÉ D'UN MILIEU POREUX

Supposons que l'écoulement de la résine dans le milieu poreux obéisse à la loi de Darcy; la perméabilité quantifie la conductivité du milieu poreux. Une bonne connaissance de ce paramètre est très importante pour modéliser le procédé RTM. La perméabilité a un caractère tensoriel. Un milieu poreux isotrope possède une perméabilité constante, comme c'est le cas pour le mat. Dans la plupart des cas, les renforts utilisés dans le procédé RTM sont orthotropes et le tenseur a trois composantes K_1 , K_2 et K_3 dans les trois directions principales orthogonales. Il y a plusieurs façons de déterminer la perméabilité : soit par un calcul analytique, soit par des essais expérimentaux ou bien numériques.

Il est cependant souhaitable pour la modélisation d'avoir un modèle analytique de prédiction de la perméabilité. Le modèle le plus populaire dans le domaine des matériaux composites est celui de Carman-Kozeny (Dullien, 1979). Cette approche est un modèle de perméabilité géométrique qui est fondé sur la "théorie du rayon hydraulique". Dans cette théorie, le milieu est considéré comme un conduit dont la section peut avoir une forme très compliquée, mais qui possède une aire moyenne constante. La perméabilité d'un tel système a la forme suivante :

$$K = \frac{d_p^2}{C} \frac{\omega^3}{(1-\omega)^2} \quad (1.8)$$

où d_p est le diamètre moyen de la section, C est la constante de Kozeny et ω est la porosité. Cependant, la constante de Kozeny doit être déterminée par des essais et elle n'est constante que dans une gamme très étroite de porosité (Skartsis et al., 1992). La théorie de Carman-Kozeny ne prend pas en compte les variations directionnelles de la porosité et des surfaces internes, elle ne modélise pas la perméabilité de milieux anisotropes (Sneidegger, 1974) comme celle des tissus utilisés pour la fabrication de matériaux composites. D'après Dullien (1979), ce modèle n'est pas toujours valide et il faut être prudent quand on l'applique.

Phelan et al. (1994) ont proposé un modèle pour prédire la perméabilité d'un milieu poreux unidirectionnel. Ils ont considéré un volume élémentaire comprenant une section de fibres et l'espace autour de cette section. La fibre elle-même est considérée comme un milieu fibreux. Les auteurs ont étudié l'écoulement à travers ce volume élémentaire. L'écoulement dans l'espace libre est caractérisé par l'équation de Navier-Stokes, et dans la section de fibres par l'équation de Brinkman. En résolvant ce système d'équations par la méthode des éléments finis, ils ont obtenu une relation entre la perméabilité et la porosité du milieu poreux. Les résultats numériques sont rarement proches des résultats expérimentaux car en réalité la structure du milieu poreux est plus complexe que le modèle mentionné ci-dessus.

De la même façon, Chibani (1990) a présenté des approches analytiques pour caractériser des renforts utilisés dans la fabrication des matériaux composites. Il a observé un volume élémentaire comprenant une section de fibres et l'espace autour de cette section. Mais ici il considère que le fil du renfort est un cylindre. Le modèle est développé à partir d'un cylindre unique, puis ensuite généralisé à plusieurs cylindres représentant la disposition réelle des fils. Les prédictions de ce modèle concordent convenablement avec les valeurs déterminées expérimentalement pour trois mats non tissés et avec quatre fluides silicones de viscosités différentes. Il existe dans la littérature beaucoup d'autres modèles analytiques dont on peut trouver des discussions plus détaillées chez Chibani (1970), Dullien (1979) et Lemenn (1994).

Puisque les modèles analytiques donnent rarement de bonnes valeurs de perméabilité, la détermination du tenseur de perméabilité est généralement accomplie par des mesures expérimentales. Étant donné que la plupart des pièces de composites fabriquées par RTM ont une forme de plaque ou de coque, la majorité des recherches se concentrent sur les mesures des perméabilités K_1 et K_2 dans le plan des pièces composites.

La technique plus simple utilisée par quelques auteurs (Bréard, 1997; Chibani, 1990; Ferland et al., 1994; Hammami, 1996) consiste en des mesures successives de perméabilité dans les deux directions principales à l'aide de l'écoulement unidirectionnel dans une cavité rectangulaire. Pour un renfort isotrope, un seul type de mesure est suffisant. Le principe de mesure est fondé sur la loi de Darcy unidirectionnelle : la perméabilité est calculée à partir des informations du débit et de la pression du fluide. L'expérience est faite soit avec un débit constant, soit avec une pression constante au port d'injection. Cette méthode est appliquée principalement pour caractériser des renforts isotropes. Ferland et al. (1994) ont développé une méthode originale pour mesurer la perméabilité d'un renfort. D'après ces auteurs, il est très difficile de maintenir la pression constante pendant l'expérience. En tenant compte de cet effet, ils ont proposées trois méthodes différentes de traitement des données pour évaluer la perméabilité.

Une autre méthode, dite d'injection centrale, est utilisée pour mesurer les perméabilités dans le plan. Cette technique est fondée sur la loi de Darcy 2D et sur les écoulements radiaux dont la source est un port d'injection central. Hammami (1996) a synthétisé les méthodes de mesure publiées dans la littérature, comme la mesure de la perméabilité à débit constant proposée par Greve et Soh (1990), la mesure à pression constante proposée par Adams et al. (1986; 1989) pour les deux types de renforts isotrope et anisotrope utilisés en RTM. Hammami (1996) a aussi étudié la perméabilité des tissus cisailés, à l'aide d'expériences réalisées à pression constante. Young et Wu (1995) ont aussi appliqué cette méthode pour mesurer la perméabilité de tissus bidirectionnels en fibres de verre.

La perméabilité transverse est étudiée par Trevino et al. (1990) et Wu et al. (1994). Pour mesurer et analyser la perméabilité transverse de différents renforts, la plupart des auteurs ont utilisé la méthode de l'écoulement unidirectionnel mentionnée ci-dessus. Le débit du fluide, la pression d'injection et la loi de Darcy unidimensionnelle sont utilisés pour calculer la perméabilité transverse. En plus de cette méthode, Wu et al. ont mentionné

aussi une autre approche pour déterminer la perméabilité transverse. Celle-ci utilise un essai d'écoulement tridimensionnel et compare les résultats avec une simulation numérique. Malheureusement, ils n'ont pas présenté clairement quelle méthode de simulation a été utilisée à cette fin.

Pour le même matériau, le résultat doit être consistant pour les différentes méthodes de mesure, ce qui demande de réaliser plusieurs mesures pour déterminer la perméabilité d'un nouveau matériau.

1.4 ÉCOULEMENT NON PERMANENT À SURFACES LIBRES

La loi de Darcy a été établie à partir d'expériences effectuées en régime permanent. Sur un plan strictement théorique, une loi telle que la loi de Darcy

$$\bar{v}^d = -\frac{K}{\mu} \bar{\nabla} \Phi \quad (1.9)$$

ne s'applique qu'aux écoulements permanents. Dans le cas d'écoulements non permanents, d'après Schneebeli (1966) la loi de Darcy devrait avoir une forme différente avec un terme transitoire de la forme :

$$\bar{v}^d + \alpha \frac{\partial \bar{v}^d}{\partial t} = \frac{K}{\mu} (-\bar{\nabla} \Phi) \quad (1.10)$$

Toutefois, en raison des valeurs très faibles des vitesses et a fortiori des accélérations (dans la mesure où le caractère de non permanence n'est pas trop accentué), il sera en général licite de négliger le terme $\partial \bar{v}^d / \partial t$. On pourra donc considérer la loi de Darcy comme valable à chaque instant en tenant compte bien entendu que la vitesse et le potentiel sont des fonctions non seulement des variables x, y, z de l'espace, mais encore du temps. Il ne faudra cependant pas oublier que les variations dans le temps doivent rester relativement lentes. L'étude de régimes d'écoulement variables, fondée sur la loi

de Darcy, ne saurait par exemple s'appliquer à des écoulements soumis à des pulsations trop rapides.

Les écoulements considérés ici présentent les caractéristiques suivantes : ils possèdent une surface libre qui se déforme dans le temps par suite d'une variation brusque ou continue d'une ou de plusieurs conditions aux limites. Les écoulements de cette catégorie peuvent être trouvés en hydrogéologie (Schneebeli, 1966). Avec un nombre de Reynolds faible ($Re < 1$), l'écoulement de la résine dans le procédé RTM appartient aussi à cette catégorie.

Les hypothèses fondamentales que l'on est amené à faire dans l'étude de ces écoulements sont les suivantes :

- validité à chaque instant de la loi de Darcy;
- incompressibilité du liquide et de la phase solide.

La première hypothèse se traduit par l'application de la loi de Darcy (1.4). La seconde hypothèse conduit à l'équation de continuité valable en tout point et à chaque instant (1.5). La seule différence par rapport aux écoulements permanents est donc jusqu'à présent que le potentiel Φ est fonction du temps. À un instant donné, le potentiel sera entièrement déterminé par les conditions aux limites régnant à cet instant précis sur le contour de l'écoulement. La solution du problème à un instant donné (c'est-à-dire la détermination du champ du potentiel à cet instant) exige donc la connaissance, d'une part des limites géométriques de l'écoulement (et en particulier celles de la surface libre), d'autre part des conditions auxquelles doit satisfaire le potentiel sur ces limites. Quant aux limites géométriques de l'écoulement, certaines font partie des données du problème et sont connues à chaque instant. Ce sont les limites imperméables et les limites équipotentiellles. Par contre, la surface libre n'est connue qu'à l'instant initial. À partir de cet état initial, la surface libre va se modifier jusqu'au moment où, éventuellement, un nouveau régime permanent ou statique soit atteint. Ces modifications de la surface libre

sont soumises à des conditions de continuité qui vont permettre d'établir l'équation du mouvement de la surface libre.

Schneebeli (1996), avec les arguments mentionnés ci-dessus, a étudié l'écoulement de l'eau souterraine à deux dimensions, dont l'une est la direction verticale. La terre est un milieu poreux isotrope. La viscosité de l'eau est unitaire. Donc le phénomène est gouverné par l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.11)$$

La surface libre du fluide est en contact avec l'air, c'est-à-dire que $\Phi = z$. L'auteur considère deux positions successives de la surface libre correspondant respectivement aux temps t et $t+dt$. Le mouvement d'une position à l'autre se fait sous l'effet du flux qui traverse la surface libre. En remplaçant la loi de Darcy dans l'équation de continuité, il obtient l'équation du mouvement de la surface libre (Schneebeli, 1966)

$$\frac{\omega}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1.12)$$

C'est une équation aux dérivées partielles dans laquelle figurent, d'une part la fonction $h(x,t)$ qui définit la surface libre, d'autre part le potentiel $\Phi(x,z,t)$ qui est à chaque instant une fonction des variables de l'espace et donc entièrement défini par les conditions aux limites. Si on connaît à un instant donné la forme de la surface libre en mouvement il est possible alors, en résolvant l'équation de Laplace en tenant compte des conditions aux limites imposées à Φ , de déterminer pour l'instant considéré le champ du potentiel et puis le champ de vitesse dans tout le domaine de l'écoulement. Grâce à la connaissance de cette vitesse instantanée, on peut tracer la surface libre à l'instant suivant, déterminer le nouveau champ de potentiel qui correspond à cette limite légèrement modifiée, recalculer les nouvelles vitesses, et suivre ainsi, de proche en proche, la surface libre dans son mouvement. Cette approche peut être générée aussi pour des problèmes d'écoulements à surfaces libres en 3D et dans un milieu poreux anisotrope. Certains auteurs (Maier et al.,

1996; Trochu et al., 1993) ont utilisé ces arguments pour modéliser l'écoulement de la résine dans le procédé RTM.

1.5 MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT DE LA RÉSINE DANS LE PROCÉDÉ RTM

Ferland (1994) et Zang (1992) ont appliqué la méthode des éléments finis pour modéliser le remplissage de la résine dans le moule pour le procédé RTM isotherme (logiciel RTMFLOT). La loi de Darcy gouverne l'écoulement de la résine dans la zone saturée. Aux ports d'injections un débit constant ou une pression constante sont imposés, et au front d'avancement de la résine la pression est considérée comme nulle. L'élément de triangle 2D non-conforme et l'élément de prisme 3D conforme sont utilisés pour résoudre les problèmes d'écoulement 2D et 3D respectivement. L'algorithme de remplissage est appliqué sur un maillage fixe. Le pas de temps à chaque nouvelle itération est choisi pour qu'au moins un élément de la zone partiellement saturée devienne complètement saturé. Après chaque pas de calcul, le domaine saturé est reconfiguré. Le procédé se répète jusqu'à ce que le moule soit rempli complètement par la résine. D'après Trochu et al. (1993), quand on utilise la méthode des éléments finis pour modéliser le remplissage de la résine dans un moule du procédé RTM avec l'élément triangulaire 2D non-conforme, la masse de résine est conservée à l'interface de deux éléments adjacents. Les simulations du procédé RTM avec logiciel RTMFLOT ont prouvé que la modélisation mentionnée ci-dessus donne de bons résultats, même quand plusieurs zones de perméabilité très différentes sont contenues dans le moule.

Maier et al. (1996) a présenté un schéma numérique pour simuler l'écoulement de la résine en 2D du procédé RTM. Le problème est traité comme l'écoulement transitoire isotherme avec surfaces libres d'un fluide incompressible newtonien dans un milieu

poreux incompressible non-déformable. Le domaine de calcul est discrétisé en éléments triangulaires. À chaque nœud, un élément de contrôle de volume est construit pour calculer le débit et l'avancement du front en contrôlant le coefficient de remplissage des éléments de volume. La procédure de calcul est semblable à celle de Ferland (1994), sauf que l'avancement du front ici est fondé sur des éléments de contrôle de volume au lieu des éléments eux-mêmes. Cet algorithme est appelé la méthode des Éléments Finis avec Volumes de Contrôle.

Cai (1992) a proposé un modèle simplifié analytique 1D pour le remplissage de la résine dans un moule par le procédé RTM. La relation entre la position du front de la résine et le temps est établie en se fondant sur la loi de Darcy unidimensionnelle, la condition de continuité, la pression nulle au front d'avancement et soit une condition de débit constant, soit une condition de pression constante imposée sur la ligne d'injection. Cai (1992) a aussi utilisé la loi de Darcy unidimensionnelle pour modéliser le remplissage de la résine dans un domaine à sections multiples en supposant que la résine remplit d'abord la première section, puis la deuxième, et ainsi de suite. Le gradient de la pression est considéré comme linéaire sur chaque section. Des sections 2D et 3D de formes simples sont aussi modélisées en considérant que l'écoulement de la résine est semblable au 1D. Deux fluides, newtoniens et non-newtoniens (loi de puissance), sont étudiés par cet auteur. Cette méthode est simple, mais très limitée. Elle ne peut être appliquée si le moule a une forme compliquée.

Dhatt et al. (1990) ont présenté un modèle bidimensionnel de l'écoulement d'un fluide et du transfert de chaleur afin de simuler le remplissage de métal à l'état fondu dans un moule. Le profil de la température est calculé à chaque instant pendant le remplissage. L'écoulement du métal fondu est caractérisé par des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible newtonien. L'interaction entre le fluide, l'air et le moule est considérée. Le transfert de chaleur s'effectue par transport-diffusion. Les conditions aux limites sont imposées à l'entrée, à la sortie du domaine et aux parois du moule. Il n'y a

pas de conditions particulières imposées au front du métal. Le modèle considère que le système métal-air est continu pour différentes propriétés. L'efficacité du modèle de remplissage dépend beaucoup du choix de la technique d'avancement du front du métal. L'algorithme de remplissage doit être assez robuste pour capturer la forme du front. De plus, la représentation de la forme du front mobile du métal peut demander un maillage trop fin sur tout le domaine. Pour éviter d'utiliser un maillage trop fin et pour capturer le front, l'auteur a proposé un algorithme robuste pour l'avancement d'un front mobile. Cet algorithme est fondé sur les notions suivantes :

- une fonction de pseudo-concentration $F(x,t)$ qui est capable de représenter la forme très lisse du front;
- le transport du métal avec la représentation eulérienne

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y}$$

Le succès de l'algorithme dépend du choix de la fonction $F(x,t)$ dans les zones du front du métal-air. À un instant donné, on obtient la vitesse pour un front du métal. L'avancement du front implique une représentation initiale $F(x,t)$ sur tout le domaine métal-air. On peut prendre la valeur 1 pour la surface du front de métal-air et obtenir un faible gradient $(\partial F / \partial x, \partial / \partial y)$ de sorte que toute la zone du métal ait une valeur $F > 1$ et la zone de l'air $F < 1$. Les variations d'un point sont une fonction de la distance de sa position au front du métal. La solution de l'équation de transport mentionnée ci-dessus donne une représentation transportée de la fonction F et un nouveau front du métal correspondant aux points qui ont $F = 1$. Cette technique est robuste, mais le choix de la fonction F dans le voisinage du front du métal demande de l'expérience et des ajustements personnels. Un des inconvénients de cette technique est que la masse de résine n'est pas nécessairement conservée ni localement sur le front ni globalement sur le moule lors de l'avancement du front (Morneau, 1995).

1.6 COMPACTION ET CONSOLIDATION

1.6.1 Revue sur la compaction

Dans plusieurs procédés de fabrication des matériaux composites, le renfort est comprimé sous l'action d'une force de compression en vue d'obtenir un certain ratio fibre / matrice dans la pièce finale. Dans des procédés tels que le RTM et le SRIM ("Structural Reaction Injection Molding"), le renfort préalablement placé dans la cavité est comprimé après fermeture du moule. Dans d'autres procédés tels que le moulage sous pression et le moulage d'autoclave, le renfort est comprimé pendant la phase de consolidation. L'application du RTM permet de produire des pièces à basse pression. En conséquence le taux de fibres des produits finaux doit rester relativement faible (de l'ordre de 20%). Très récemment, dans le domaine de fabrication des matériaux composites, une nouvelle technique est apparue pour mouler des pièces de composites à taux de fibres plus élevé (par exemple jusqu'à 60%). Cette méthode est une variante du procédé RTM. Elle implique une étape de compression qui permet de comprimer le renfort et la résine à haute pression. Ce procédé dans lequel le renfort peut être comprimé à l'état sec ou saturé (Robitaille et Gauvin, 1996) pendant l'injection est appelé CRTM ("Compression Resin Transfer Molding"). Ce phénomène de compression du squelette dans un milieu poreux saturé est appelé *consolidation*. La connaissance des relations entre la force de compaction et le volume des fibres est nécessaire pour modéliser le procédé CRTM. Plusieurs modèles analytiques de consolidation peuvent être trouvés dans la littérature. Le phénomène de consolidation a été étudié très tôt en mécanique des sols. Les modèles issus de la mécanique des sols ont été proposés pour la première fois par Terzaghi (1943). Cette théorie est bien résumée dans Schneebeli (1966). Dans la suite, on passe en revue les différentes applications de la théorie de la consolidation dans le domaine des matériaux composites.

Gutowski et al. (1987) ont supposé que la consolidation d'un renfort saturé comprend deux phénomènes importants : l'écoulement visqueux de la résine dans le renfort et la déformation élastique du renfort. Quand le taux de fibres Vf est inférieur à une valeur Vf_0 , le milieu fibreux ne peut supporter la charge. Quand il est supérieur à Vf_0 , la charge extérieure σ est égale à la somme de la pression de la résine p et de la résistance du renfort σ' ($\sigma = \sigma' + p$). Enfin Vf atteint un maximum théorique Vf_m qui dépend de la structure des renforts. Ils ont développé un modèle mathématique pour la rigidité transversale, considérant que les fibres sont des poutres à contacts multiples en flexion qui répondent de façon linéaire élastique à une sollicitation. La relation $\sigma' = \sigma'(Vf)$ décrit la rigidité du renfort

$$\sigma' = A_s \frac{\sqrt{\frac{Vf}{Vf_0}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{Vf_m}{Vf}} - 1 \right)^4}, \quad (1.13)$$

où $A_s = 3\pi E / \beta^4$, E étant la rigidité en flexion d'une fibre et β le ratio typique entre la longueur de la portée et la hauteur de la section d'une fibre. L'écoulement de la résine est caractérisé par la loi de Darcy et l'équation de continuité.

Gauvin et al. (1986) proposent un modèle semi-empirique de compressibilité pour une simple couche, reliant la fraction volumique de fibres à la pression σ' nécessaire à les comprimer en fonction de quatre paramètres caractéristiques du renfort A_i ($i = 0, 1, 2, 3$) :

$$Vf = \frac{10 Vf_0}{10 A_0 \sigma' + A_1 \ln(10 \sigma') + \frac{A_2}{10 \sigma'} + A_3} \quad (1.14)$$

où Vf_0 la fraction volumique du renfort à pression ambiante. Pour connaître la compression d'un multicouche, il suffit simplement de considérer que la somme des épaisseurs de toutes les couches du renfort est égale à l'épaisseur du moule et que la pression appliquée σ' est la même pour chaque couche :

$$Vf_{\text{moy}} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{n_c} h_i Vf_i \quad (1.15)$$

où H est l'épaisseur du laminé, h_i l'épaisseur de la couche i et Vf_i la fraction volumique de fibres correspondante.

En distinguant deux régimes de compression, linéaire et non linéaire, en fonction de Vf , Batch et al. (1990) ont mis au point un nouveau modèle pour une couche de renfort (mat ou unidirectionnel). Comme le modèle de Gutowski, ce modèle est fondé sur l'équation de déflexion d'une poutre en appui simple à ses deux extrémités. La pression de compactage σ' s'exprime en fonction du taux de fibres Vf comme

$$\sigma' = \bar{E} (Vf - Vf_0) \quad (1.16)$$

avec

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \quad \text{pour } Vf < Vf_{\text{cont}} \quad (1.17)$$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \frac{(1 - \eta') \left(\frac{1}{Vf_0} - \frac{1}{Vf} \right)}{\eta' \left(\frac{1}{Vf} - \frac{1}{Vf_m} \right)} \quad \text{pour } Vf \geq Vf_{\text{cont}} \quad (1.18)$$

et

$$Vf_{\text{cont}} = \left[\frac{1}{Vf_0} - \eta' \left(\frac{1}{Vf_0} - \frac{1}{Vf_m} \right) \right]^{-1} \quad (1.19)$$

où Vf_m est la fraction volumique maximale de fibres avant cassure des fibres, η' un facteur d'"inefficacité" des fibres au compactage, Vf_{cont} caractérise la transition du régime de compaction linéaire au régime non linéaire et \bar{E}_0 est une constante d'élasticité des renforts en régime linéaire.

Le modèle de compaction de Gutowski est développé pour les procédés de fabrication qui utilisent des imprégnés. Il ne peut pas être appliqué directement pour des renforts multicouches avec différentes séquences d'empilement, orientations, etc. La présence de "roving", la réorganisation du réseau de fibres, l'hystérésis de compaction, la vitesse de compaction ou la relaxation ne sont pas encore considérées. Le modèle de compaction de Batch présente les mêmes limitations que celui de Gutowski.

Une autre approche pour modéliser la compression du réseau de fibres est issue de la mécanique des sols. Il s'agit de modèle de Taylor (1948) qui s'exprime de la façon suivante :

$$Vf = Vf_i + C_c \log_{10} \left(\frac{\sigma'}{\sigma'_i} \right) \quad (1.20)$$

où σ'_i est généralement pris égale à l'unité, C_c est une constante de compression et Vf_i est la fraction volumique de fibres correspondant à σ'_i . Robitaille et Gauvin (1996) ont fait un bon résumé des modèles analytiques de compaction disponibles dans la littérature. Beaucoup d'autres modèles sont présentés par ces auteurs. Ils ont étudié les résultats de compaction des modèles avec différents paramètres. D'après ces auteurs, jusqu'à présent, il n'y a aucun modèle analytique qui peut complètement décrire le comportement en compaction des renforts textiles.

Beaucoup d'articles ont présenté des résultats expérimentaux concernant la compaction et la relaxation des renforts utilisés pour la fabrication des matériaux composites. La plupart des essais sont réalisés pour étudier la consolidation d'une couche des renforts secs ou saturés sous l'action de forces de compression normales à leur plan. Kim et al. (1991) ont fait des essais de compression unidirectionnels à vitesse constante. Ils ont obtenu des courbes de contraintes du renfort en fonction du taux de fibres. La forme des courbes est identique à celles de Gutowski (1987). Ils ont trouvé que l'allure de la courbe dépend de la vitesse de l'essai, de la répétition des essais, de l'effet de lubrification, de

l'orientation des fibres et de l'empilement des renforts. Ils ont fait aussi des essais de relaxation. Les courbes obtenues répondent bien au modèle viscoélastique proposé par Maxwell-Wiechert (Kim et al., 1991). De plus, ils ont mis en évidence la différence de comportement entre des renforts secs et des préimprégnés.

Clerk (1994) et Lemenn (1994) ont étudié l'effet du nombre de couches, de la vitesse de compaction et du nombre de cycles pour des tissus bidirectionnels. L'objectif de ces essais est de mesurer l'évolution de la fraction volumique de fibres V_f dans un tissu en fonction de la pression de fermeture du moule. Les résultats expérimentaux sont comparés aux quatre modèles analytiques suivants : le modèle de Gauvin, le modèle de Taylor, le modèle de Batch et le modèle de Gutowski. Les résultats montrent que le modèle de Gauvin donne la meilleure prédiction de la courbe de compaction.

Les revues bibliographiques de Robitaille et al. (1996) sur la compaction et la relaxation des renforts utilisés pour la fabrication des matériaux composites donnent une très bonne vision générale sur le sujet. D'après ces auteurs, dans la majorité des cas, les courbes expérimentales de compaction peuvent être ajustées à l'équation suivante proposée par Gauvin et al. (1994).

$$V_f = \bar{A} (\sigma')^{\bar{B}} \quad (1.21)$$

où σ' est la pression de compaction et V_f est la fraction volumique de fibres. Le paramètre \bar{A} est la fraction de volume de fibres correspondant à la pression unitaire de compaction et \bar{B} est l'indice de rigidité de compaction. Plus la valeur de \bar{B} ($\bar{B} < 1$) est faible, plus vite la pression de compaction augmente en référant à une valeur de fraction volumique de fibres. Ils ont défini un paramètre \bar{M} , appelé facteur de rigidité, comme étant la pente de la droite entre les deux points $\sigma' = 20\% \sigma'_m$ et $\sigma' = 100\% \sigma'_m$ dans l'équation ci-dessus, où σ'_m est la pression maximale atteinte. En outre, la fraction volumique de fibres représentative (RVF) est reportée aussi comme un paramètre qui correspond au niveau de la pression de compaction choisie.

Les courbes de relaxation sont, quant à elles, ajustées à l'équation suivante :

$$\frac{\sigma'}{\sigma'_0} = 1 - \bar{C} t^{(1/\bar{D})} \quad (1.22)$$

où $\sigma'(t)$ est la pression de compaction au temps t et σ'_0 la pression maximum, initiale. Le paramètre \bar{C} indique la chute de pression après une seconde, et \bar{D} représente la concavité de la courbe de relaxation. Un autre paramètre caractéristique T_r est défini comme l'intersection entre la tangente de la courbe ajustée de relaxation à $t = 1s$ et l'axe des abscisses. Finalement, la valeur de σ'/σ'_0 à $t = 300s$ (σ'_{300}) calculée à partir de la courbe ajustée est aussi reportée comme un paramètre de relaxation. Les paramètres \bar{C} , \bar{D} , T_r et σ'_{300} donnent des moyens simples pour comparer des courbes de relaxation.

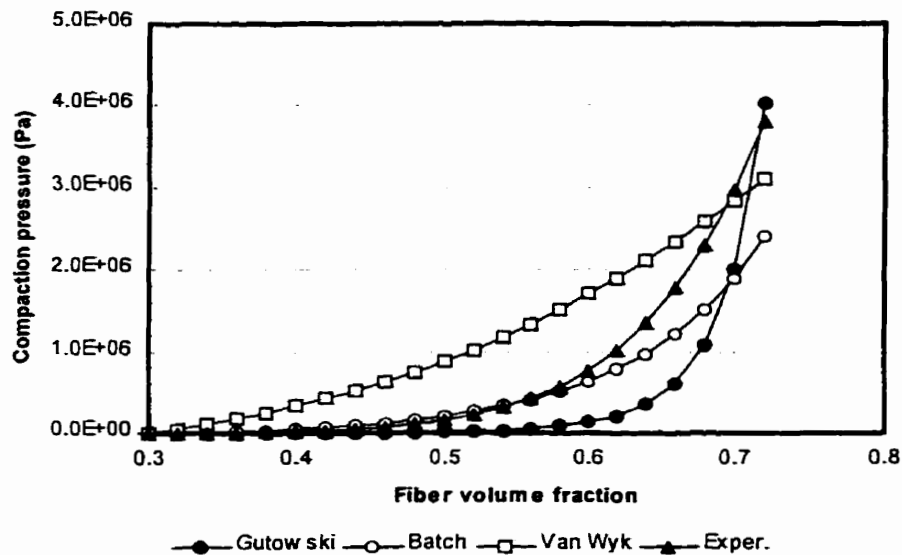


Figure 1.1. Courbes de compaction (d'après Robitaille (1998)).

Les courbes de compaction des modèles de Gutowski, Batch et Van Wyk présentées dans la Figure 1.1 sont comparées avec la courbe expérimentale de compaction d'un renfort tissé qui est ajustée avec le modèle de Gauvin (1994). Ces auteurs ont évalué les essais de compaction de Clerk et Gauvin (1994), de Kerachni et Gauvin (1992), de Kim, McCarthy et Fanucci (1991), de Lemenn et Gauvin (1994), de Piechowski et Kendall

(1992), selon leurs modèles de compaction et de relaxation. À partir des résultats analysés, ils ont fait des remarques représentant le phénomène. La variation du facteur \bar{M} est inférieure à 7% dans la plupart des cas. Le nombre de couches a l'influence la plus forte sur le facteur de rigidité \bar{M} . Le nombre de cycles de compaction a aussi un grand effet sur \bar{M} , mais \bar{B} diminue progressivement avec la répétition des cycles de compaction. Les effets de la vitesse de compaction sur \bar{M} et \bar{B} sont faibles. Les fractions maximales de fibres sont plus grandes quand le nombre de cycles augmente. La lubrification pendant la compaction fait augmenter plus vite la rigidité du composite (\bar{M} augmente et \bar{B} diminue); un plus grand taux de fibres peut être atteint grâce à la lubrification. Quant à la relaxation, plus la pression initiale appliquée est élevée, moins les renforts présentent de relaxation. Par contre, plus grand est le nombre de couches, plus la relaxation des renforts est grande. Robitaille et Gauvin (1998) ont montré que le comportement d'un renfort fibreux à l'état sec ou saturé peut également être décrit par ce modèle.

Jonsson & Jonsson (1992) ont utilisé un modèle de compaction qui a une forme similaire à l'équation (1.21) pour modéliser la consolidation du milieu poreux sous l'action de l'écoulement du fluide à travers ce milieu en régime permanent. La formulation se fonde sur les hypothèses suivantes :

- Le volume total du milieu poreux peut se décomposer en un volume de matière solide, en un volume d'eau absorbée et en un volume de vide. Les deux premiers volumes sont considérés comme incompressibles et seul le volume de vide peut se déformer.
- Il n'y a pas de mélange de matière entre les couches dans la matrice, mais celles-ci peuvent se déformer.

Les auteurs ont modélisé l'écoulement permanent unidimensionnel d'un fluide qui traverse un milieu poreux déformable. Sur le milieu s'exerce une pression totale p_{tot} , qui

peut être divisée en deux composantes : la pression mécanique σ'_m et la pression hydraulique p_h . Les deux dernières peuvent varier, mais la pression totale est constante. Le volume de vide V_v est comprimé sous l'action de la pression mécanique par la relation suivante :

$$\beta_v = N (\sigma'_m)^{-b} \quad (1.23)$$

où N et b sont deux paramètres dépendant du matériau et β_v est la compressibilité du volume de vide définie par la relation classique suivante :

$$\beta_v = -\frac{1}{V_v} \left(\frac{\partial V_v}{\partial \sigma'_m} \right)_T \quad (1.24)$$

D'après ces auteurs, la valeur de N varie beaucoup pour différents matériaux, par contre b est égale à peu près à 1 pour la plupart des matériaux. En combinant les deux dernières équations, on obtient la relation suivante :

$$X = \left(\frac{\overline{\sigma'_m}}{\sigma'_m} \right)^N \overline{X} \quad (1.25)$$

où X est le ratio de vide à la pression σ'_m , défini par le rapport entre le volume de vide V_v et le volume de solide V_s , et \overline{X} le ratio de vide à la pression $\overline{\sigma'_m}$ pour la première compression du milieu poreux. D'après ces auteurs, pendant la première compression, la compaction est un processus irréversible décrit par équation (1.24), tandis qu'après la première compression, le matériau est considéré comme élastique avec la compressibilité constante présentée par la relation suivante :

$$\beta_v = N (\sigma'_{\max})^{-1}. \quad (1.26)$$

La combinaison entre (1.25) et (1.26) donne une nouvelle relation, pour la pression inférieure à la pression maximale :

$$X = X_{\sigma'_{\max}} \exp \left(N - \frac{N \sigma'_m}{\sigma'_{\max}} \right) \quad (1.27)$$

Cette relation permet de déterminer la perméabilité K qui est définie comme une fonction de X soit par une étude expérimentale, soit par un modèle analytique. La perméabilité et la compressibilité sont bien combinées dans une équation adimensionnelle de Darcy

$$Q(y) = \frac{v_{sa}}{\mu W S_s^2} K(X) \frac{dp_h}{dy} \quad (1.28)$$

où $Q(y)$ est le débit de l'écoulement, v_{sa} le volume par unité de masse du solide, W la masse par unité d'aire, S_s l'aire par unité de masse du solide, $K(X)$ la perméabilité du milieu poreux, dp_h/dy le gradient de la pression hydraulique dans la direction de l'écoulement. Cette équation s'applique pour la consolidation causée par un écoulement permanent unidimensionnel. Pour avoir la solution, on a besoin de poser les conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du milieu poreux. Malheureusement, cette partie n'a pas été clairement présentée par les auteurs. Le débit de l'écoulement permanent du fluide est constant et devrait être fonction de la pression totale et de la pression hydraulique p_h à l'entrée si on considère que la pression hydraulique est nulle à la sortie du milieu poreux.

Dans les procédés tels que le RTM et le SRIM, le point d'injection se trouve parfois au milieu du moule. Quand la vitesse de la résine d'entrée est assez élevée, le renfort est déformé dans la région au voisinage du point d'injection, sous l'action de cet écoulement. Trevino et al. (1991) ont observé ce phénomène quand ils ont visualisé l'écoulement de la résine dans les procédés RTM et SRIM. Ultérieurement, Han et al. (1993) ont constaté aussi la déformation du renfort pendant le remplissage de la résine dans le moule à haute vitesse. Pour déterminer la déflexion du renfort, ils ont considéré le réseau de fibres comme une poutre élastique et supposé que la distribution de pression est linéaire. Bakalamian (1995) a aussi calculé la déformation du renfort en considérant le réseau de fibres comme une plaque et en supposant que la distribution de la pression avait une forme de paraboloïde. Wu et al. (1994), lors de la mesure de la perméabilité transverse,

ont trouvé que la nonlinéarité de la relation entre la pression d'injection versus le débit est causée par la déformation du renfort sous l'action de la pression de l'écoulement.

Parnas et al. (1995) ont supposé que les déformations du renfort, causées d'une part par la pression de fermeture du moule et d'autre part par la pression de la résine injectée dans le moule, sont superposables. La déformation due à la pression de la résine est contrôlée par la différence σ' entre la pression d'injection de la résine p et la pression de fermeture σ , avec

$$\sigma' = \begin{cases} p - \sigma, & p \geq \sigma \\ 0 & , p < \sigma \end{cases} \quad (1.29)$$

Le problème est analysé d'une manière quasi-statique. À chaque pas, la déformation du renfort est supposée correspondre à la distribution de pression pour ce pas de calcul. Le renfort est considéré comme une région rectangulaire élastique en état de déformation plane et la déformation est calculée par la fonction de contrainte d'Airy de la théorie de l'élasticité. Le résultat final est une fonction de déplacement de la surface du renfort. Mais dans l'article en question, l'auteur n'explique pas comment déterminer le coefficient de Poisson du réseau de fibres.

1.6.2 Études analytiques de la consolidation et méthodes de résolution

Ikegawa (1996) a étudié expérimentalement l'effet de la compression sur le problème de "bulle d'air" dans les pièces composites finales fabriquées par un procédé identique au procédé CRTM. L'auteur a montré que la qualité des pièces fabriquées par CRTM est meilleure que celles fabriquées par RTM. Dans le domaine de la fabrication des matériaux composites, certains auteurs (Dave et al., 1987; Gutowski et al., 1987) ont étudié la consolidation des laminés composites où le renfort est déjà complètement saturé

de résine. Phelan (1997) a proposé un modèle de la consolidation et un algorithme de résolution pour le procédé CRTM. Cependant, dans cet article l'auteur n'a pas encore présenté les résultats ou bien des analyses obtenus de ce modèle. Dans le domaine de la mécanique des sols, il existe plusieurs études sur la consolidation du sol, un phénomène très proche du procédé CRTM. Plusieurs méthodes de résolution analytiques et numériques sont proposées. De nombreux auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis pour traiter le problème de consolidation des sols tels que Belkeziz et al. (1982), Christian et al. (1970, 1972), Hwang et al. (1971) et Sandhu (1968).

1.6.2.1 Théorie de la consolidation de Biot

D'après Biot (1941), sous l'action d'une force extérieure, le sol saturé d'eau incompressible est tassé et de l'eau est extraite du sol. Ce phénomène est appelé *consolidation*. La contrainte σ du sol se décompose en deux composantes. L'une est causée par la pression hydrostatique p de l'eau qui remplit les vides du milieu poreux. L'autre, σ' , est causée par la contrainte moyenne dans le squelette. Cette relation fut proposée pour la première fois par Terzaghi (1943)

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} p \quad (1.30)$$

Le sol est considéré comme un milieu isotrope. Le squelette du sol présente un comportement linéaire élastique. Ses déformations sont considérablement petites. La relation contrainte-déformation obéit à la loi de Hooke

$$\sigma' = E \varepsilon \quad (1.31)$$

où σ' est le tenseur des contraintes effectives, ε le tenseur des déformations et E le tenseur d'élasticité du matériau. L'écoulement de l'eau est gouverné par la loi de Darcy

$$\bar{v}^d = -K \bar{\nabla} H \quad (1.32)$$

où \bar{v}^d est la vitesse moyenne de l'eau, K est le tenseur anisotrope des perméabilités et $\bar{\nabla} H$ est le vecteur gradient de la charge hydraulique. Comme le sol est isotrope, la

perméabilité se ramène à une constante K . Donc la loi de Darcy s'écrit, en considérant que la gravité est négligeable et que la viscosité de l'eau est unitaire

$$\vec{v}^d = -K \vec{\nabla} p. \quad (1.33)$$

On a l'équation d'équilibre suivante

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad (1.34)$$

où f_i est la force massique. L'effet de la force volumique est négligeable par rapport aux contraintes. Alors cette équation devient

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (1.35)$$

La masse de l'eau interstitielle est invariante. La quantité d'eau sortant d'un élément infinitésimal est égale à la variation de volume du sol dans le temps. Cela se traduit par l'équation de continuité

$$\nabla \vec{v}^d = \frac{\partial v_x^d}{\partial x} + \frac{\partial v_y^d}{\partial y} + \frac{\partial v_z^d}{\partial z} = -\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t}, \quad (1.36)$$

où v_x, v_y, v_z sont les vitesses de Darcy selon les axes x, y et z du système de coordonnées cartésiennes. Si E dénote le module Young et ν le coefficient de Poisson du sol, alors la variation de volume du sol est définie par la relation suivante :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}) = \varepsilon_{vol} \quad (1.37)$$

Introduisons ici la contrainte sphérique $\sigma'_{oct} = (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz})/3$. L'équation de continuité (1.36) peut s'écrire en utilisant la loi de Darcy

$$K \nabla^2 p = \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{\partial \sigma'_{oct}}{\partial t} \quad (1.38)$$

De la relation $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} p$, on tire $\sigma_{oct} = \sigma'_{oct} + p$. Alors, en posant

$$C_{v_3} = -\frac{KE}{3(1-2\nu)}, \quad (1.39)$$

on obtient finalement l'équation entre la pression interstitielle et la contrainte du sol qui gouverne la consolidation d'un sol saturé

$$\nabla^2 p = \frac{1}{C_{v_3}} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{act}}{\partial t} \right) \quad (1.40)$$

1.6.2.2 Théorie de la consolidation de Rendulic

La théorie de Rendulic (1936), couramment appelée théorie pseudo-tridimensionnelle de la consolidation, est fondée sur l'hypothèse incorrecte que σ_{act} est constant dans le temps sur tout le domaine étudié. L'équation (1.40) devient alors :

$$C_{v_3} \cdot \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.41)$$

Identique à l'équation de diffusion de la chaleur, cette équation possède un grand nombre de solutions analytiques, particulièrement pour des problèmes plans.

1.6.2.3 Théorie de la consolidation de Terzaghi

Une autre façon de ramener les équations de la consolidation aux équations de la diffusion de la chaleur est d'adopter les hypothèses de Terzaghi (1923). Ce dernier suppose que le drainage et la consolidation sont unidimensionnels et que la contrainte totale σ_{\perp} est constante dans le temps, ce qui découle des équations d'équilibre (1.35) lorsque la charge appliquée est verticale et constante. Les équations (1.37), (1.39) et (1.40) deviennent alors :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{\equiv} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \sigma'_{\equiv} \quad (1.42)$$

$$C_{\nu_1} = -\frac{KE(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (1.43)$$

$$C_{\nu_1} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.44)$$

1.6.2.4 Équations générales de la consolidation

On note σ'_{ij} le tenseur des contraintes moyennes du squelette, p la pression de l'eau interstitielle, ρ la densité du milieu, f_i la force massique, ε_{kl} le tenseur de déformation, E le tenseur d'élasticité du matériau, u le déplacement du squelette, v^d la vitesse de Darcy de l'eau interstitielle, K le tenseur de perméabilité du squelette et ρ^f la densité de l'eau.

À partir des théories mentionnées ci-dessus, les équations de base de la théorie de Biot de la consolidation sont les suivantes :

- les équations d'équilibre du milieu

$$\sigma'_{ij,j} + p_{,j} + \rho f_i = 0, \quad (1.45)$$

- la loi de comportement pour un squelette anisotrope élastique

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.46)$$

- les relations déplacements-déformations dans l'hypothèse des petites déformations

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (1.47)$$

- la loi de Darcy pour l'écoulement de l'eau interstitielle,

$$v_i^d = -K_{ij}(p_{,j} + \rho^f f_j), \quad (1.48)$$

- et l'équation de continuité du fluide interstitiel incompressible

$$v_{i,j}^d + \dot{u}_{i,j} = 0. \quad (1.49)$$

Ces équations doivent être associées aux conditions aux limites portant sur la déformation du squelette et sur l'écoulement. Substituant les équations (1.46) et (1.47) dans (1.45), on obtient l'équation d'équilibre

$$\frac{1}{2} [E_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})]_{,j} + p_{,j} + \rho f_i = 0 \quad (1.50)$$

En remplaçant (1.48) dans (1.49) on a une autre forme de l'équation de continuité

$$[-K_{ij}(p_{,j} + \rho^f f_j)]_{,i} + \dot{u}_{i,j} = 0. \quad (1.51)$$

L'étude des problèmes de consolidation passe par la résolution des équations (1.50) et (1.51) simultanément, auxquelles sont associées les conditions aux limites et les conditions initiales. Les solutions analytiques sont rares et ne concernent que des cas bien précis : Biot (1941), Mandel (1957) etc.

1.6.2.5 Résolution du système de Biot par la méthode des éléments finis

Belkeziz et al. (1982) ont résumé des modèles numériques disponibles dans la littérature sur l'étude de la consolidation des sols comme les suivants :

Modèle de Sandhu

En se fondant sur les équations présentées dans le paragraphe précédent, Sandhu (1968) écrit le système d'équations sous la forme $A_{ij}U_j = F_i$. Pour obtenir un opérateur A_{ij} symétrique, en posant $\theta_i = p_i + \rho^{\beta} f_i$ les équations (1.48) et (1.49) sont remplacées par les équations équivalentes suivantes:

$$g^* v_i = -g^* K_{ij} \theta_j$$

$$g^* \theta_i = g^* (p_i + \rho^{\beta} f_i)$$

$$u_{i,i} = -g^* v_{i,i}$$

où le produit u^*v est défini par l'équation

$$u^*v = \int_0^t u(t-\tau).v(\tau).d\tau$$

et $g(t) = 1$. À ce système est associé la fonctionnelle

$$F(u, p, t) = \int_{\Omega} [u_{i,j}^* E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + 2p^* u_{i,i} - 2u_i^* \rho f_i - g^* p_j^* K_{ij} p_j - 2g^* f_j^* K_{ij} \rho^{\beta} f_j] d\Omega$$

avec des conditions aux limites $\bar{V} = v_i n_i$ sur la surface S_v et $\bar{T} = (\sigma'_{ij} + \delta_{ij} p) n_j$ sur S_{σ} . L'approximation par un modèle éléments finis, après le choix des fonctions d'interpolation, conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} R u(t) + C p(t) &= F_1 \\ C^T u(t) - g^* Q p(t) &= g^* F_2 \end{aligned} \tag{1.52}$$

où R , C , C^T et Q sont les sous-matrices de la matrice globale.

Sandhu a utilisé l'élément P_2P_1 , c'est-à-dire que les déplacements présentent une variation quadratique à l'intérieur de l'élément triangulaire, et les pressions interstitielles une variation linéaire.

L'équation (1.52) contenant des produits de convolution, l'obtention de la solution à l'instant $t = \Delta t$ nécessite d'une part la connaissance des valeurs connues à l'instant t et d'autre part une hypothèse sur la variation des inconnues entre t et $t + \Delta t$. L'intégration dans le temps mène aux équations

$$R u(t + \Delta t) + C p(t + \Delta t) = F_1(t + \Delta t)$$

$$C^T u(t + \Delta t) - \alpha \Delta t Q p(t + \Delta t) = -C^T u(t) + \alpha \Delta t Q p(t) + \Delta t F_2(t) - \alpha \Delta t F_2(t + \Delta t)$$

où α dépend du schéma d'approximation temporel utilisé. Sandhu utilise une variation linéaire des inconnus qui donne $\alpha = 1/2$ et préconise également une loi de variation logarithmique qui donnerait :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\ln(1 + \Delta t)}$$

Modèle de Christian

Le modèle de Christian n'est pas fondé sur le principe variationnel du modèle Sandhu :

- la première des deux équations de (1.52) est obtenue à partir du théorème des travaux virtuels, exprimé en terme de contraintes effectives et de pression interstitielle;
- la seconde équation est obtenue en écrivant que la variation de volume de l'élément est égale à l'intégrale de la déformation volumique sur l'élément.

Les équations deviennent :

$$\begin{aligned} R u(t) + C p(t) &= F_1 \\ C^T u(t) &= F_2 \end{aligned} \quad (1.53)$$

où F_2 est proportionnel aux déformations volumiques. Le procédé utilisé par Christian est le suivant:

- l'état initial non drainé est supposé connu par la distribution des contraintes et les déformations volumiques;
- les pressions interstitielles sont obtenues par la résolution des équations (1.53);
- la distribution des pressions interstitielles ainsi obtenue est utilisée pour calculer la variation de volume pour un incrément de temps Δt ;
- la nouvelle distribution de déformation volumique est ensuite injectée dans les équations (1.53) pour obtenir la distribution des pressions interstitielles au pas de temps suivant.

Ce procédé présente l'inconvénient de ne pas traiter simultanément les équations (1.53) de la consolidation. Il s'est avéré d'autre part sensible à la taille du maillage en raison de son caractère explicite. Malgré tout, cette méthode reste simple, étant donnée le découplage entre le calcul des pressions interstitielles et le calcul de la variation de volume dans le temps.

Modèle de Belkeziz et Magnan

Les auteurs ont utilisé aussi les équations de la consolidation de Biot (1.45-1.49). La formulation variationnelle du squelette du sol pour tout déplacement admissible δu_i est la suivante, avec les conditions aux limites, $u_i = \bar{u}_i$ sur S_u et $\bar{T} = (\sigma'_{ij} + \delta_{ij} p) n_j$ sur S_σ comme indique la Figure 1.2 :

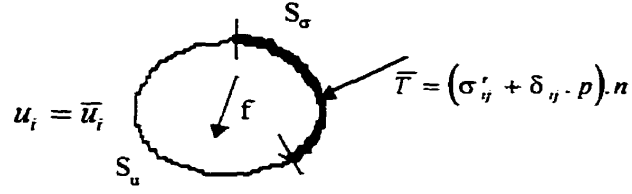


Figure 1.2. Conditions aux limites sur le squelette.

$$\int_{\Omega} [-\sigma'_{ij,j} - \delta_{ij} p_{,j} - \rho f_i] \delta u_i d\Omega + \int_{S_{\sigma}} [(\sigma'_{ij} + \delta_{ij} p) n_j - \bar{T}_i] \delta u_i dS = 0$$

Après quelques modifications, on obtient la forme faible de cette équation :

$$\int_{\Omega} (E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta u_{i,j} + \delta_{ij} p \delta u_{i,j}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_i \delta u_i d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \bar{T}_i \delta u_i dS = 0 \quad (1.54)$$

En posant $\Phi_i = p_{,i} + \rho_w f_i$, la formulation variationnelle de l'écoulement du liquide interstitiel pour $\delta\Phi$ admissible est construite avec les conditions aux limites, $\Phi = \bar{\Phi}$ sur S_{Φ} et $v_i n_i = \bar{v}$ sur S_v comme indique la Figure 1.3

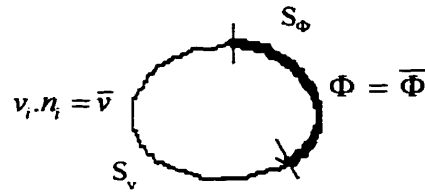


Figure 1.3. Conditions aux limites sur le fluide.

$$\int_{\Omega} [-(K_{ij} \Phi_{,j})_{,i} + \dot{u}_{i,j}] \delta\Phi d\Omega + \int_{S_v} [(K_{ij} \Phi_{,j}) n_i + \bar{v}] \delta\Phi dS = 0$$

Enfin, sa forme faible est la suivante

$$\int_{\Omega} K_{ij} \Phi_{,j} \delta\Phi_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \dot{u}_{i,j} \delta\Phi d\Omega - \int_{S_v} \bar{v} \delta\Phi dS = 0 \quad (1.55)$$

La résolution des équations de la consolidation se ramène donc à chercher, à tout instant t , $(u, v, w, \Phi) = (U, \Phi)$, tel que :

$$\delta F = \int_{\Omega} (\mathbf{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta u_{i,j} + \delta_{ij} p \delta u_{i,j}) d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \bar{T}_i \delta u_i dS = 0,$$

et

$$\delta J = \int_{\Omega} \mathbf{K}_{ij} \Phi_{,j} \delta \Phi_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \dot{u}_{i,j} \delta \Phi d\Omega - \int_{S_{\tau}} \bar{v} \delta \Phi dS = 0.$$

La méthode des éléments finis est appliquée pour chercher la solution. Les auteurs ont utilisé l'élément triangulaire à 3 nœuds pour discrétiser le domaine de calcul en 2D. Enfin on en déduit les équations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} R_G U_G - C_G \Phi_G &= F_G \\ -C_G^T \dot{U}_G - Q_G \Phi_G &= -S_G \end{aligned} \quad (1.56)$$

où R_G , C_G , C_G^T et Q_G sont les sous-matrices de la matrice globale. La première des deux équations représente les conditions d'équilibre et la seconde l'équation de continuité de l'écoulement.

Le domaine de temps étant discrétisé, l'établissement d'une formule de récurrence donnant la valeur des inconnues du problème (ici les déplacements et les charges) à l'instant $t + \Delta t$ en fonction de leur valeur à l'instant t permet de connaître parfaitement l'évolution des fonctions inconnues dans tout le domaine de temps étudié, si l'on connaît leur valeur à l'instant initial. Les auteurs ont supposé que les déplacements U et les charges Φ présentent des variations linéaires entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$. Ils ont obtenu les équations suivantes en posant $\lambda = \tau - t / \Delta t$

$$\begin{aligned} U(\tau) &= (1 - \lambda)U(t) + \lambda U(t + \Delta t) \\ \Phi(\tau) &= (1 - \lambda)\Phi(t) + \lambda \Phi(t + \Delta t) \\ \dot{U}(\tau) &= \frac{1}{\Delta t} [-U(t) + U(t + \Delta t)] \end{aligned} \quad (1.57)$$

Ils ont ensuite utilisé la méthode de Galerkin qui consiste à intégrer les deux équations matricielles (1.56) sur l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ après pondération par la fonction λ :

$$\int_t^{t+\Delta t} [R U(\tau) - C \Phi(\tau)] \lambda d\tau = \int_t^{t+\Delta t} F(\tau) \lambda d\tau,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} [-C^T \dot{U}(\tau) - Q \Phi(\tau)] \lambda d\tau = \int_t^{t+\Delta t} -S(\tau) \lambda d\tau.$$

En imposant à U , Φ et \dot{U} la variation linéaire définie précédemment et en supposant que F et S varient de la même manière sur l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, on obtient :

$$RU(t + \Delta t) - C \Phi(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) + \frac{1}{2}F(t) - \frac{1}{2}RU(t) + \frac{1}{2}C \Phi(t).$$

$$-C^T \dot{U}(t + \Delta t) - \frac{2\Delta t}{3}Q \Phi(t + \Delta t) = \frac{2\Delta t}{3}S(t + \Delta t) - \frac{\Delta t}{3}S(t) - C^T U(t) + \frac{\Delta t}{3}Q \Phi(t).$$

Avec les notations suivantes :

$$G_{\Delta t} = \begin{bmatrix} R & -C \\ -C^T & -\frac{2\Delta t}{3}Q \end{bmatrix}, \quad G_{\Delta t}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}R & \frac{1}{2}C \\ -C^T & \frac{\Delta t}{3}Q \end{bmatrix}, \quad V_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} U(t + \Delta t) \\ \Phi(t + \Delta t) \end{bmatrix}, \quad V_t = \begin{bmatrix} U(t) \\ \Phi(t) \end{bmatrix},$$

et

$$L_{\Delta t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[F(t) + 2F(t + \Delta t)] \\ -\frac{\Delta t}{3}[S(t) + 2S(t + \Delta t)] \end{bmatrix}$$

les deux équations s'écrivent :

$$G_{\Delta t} V_{t+\Delta t} = L_{\Delta t} + G_{\Delta t}^* V_t \quad (1.58)$$

Cette formule de récurrence permet, en connaissant les déplacements et les potentiels initiaux, d'évaluer par un processus itératif les déplacements et les charges à tout instant t .

1.6.2.6 Étude de la consolidation de Gutowski et al.

Gutowski et al. (1987) ont étudié analytiquement le problème de la consolidation des laminaires renforcées saturées de résine. La théorie est fondée sur les équations semblables à celles de la théorie de la consolidation en mécanique des sols mentionnée dans les paragraphes précédentes. La différence est que l'écoulement de la résine est tridimensionnel, mais la consolidation du renfort est unidirectionnelle. La loi de comportement du renfort de Gutowski (1.13) est utilisée par l'auteur pour la relation contrainte-déformation. Ici la déformation est représentée par le paramètre "taux de fibres V_f ".

1.7 CONCLUSION

On peut remarquer que l'étude de la consolidation doit prendre en compte les considérations importantes suivantes :

- Le comportement des renforts varie beaucoup. Les renforts ont un comportement de grande déformation, non-linéaire et viscoélastique. Il existe plusieurs modèles différents qui décrivent le comportement des renforts utilisés dans la fabrication des matériaux composites. Malheureusement, il n'existe pas encore un standard pour ce type de renforts. Traditionnellement, la relation entre la pression de compression et le taux de fibres $\sigma = \sigma(V_f)$ représente le comportement des renforts.
- La contrainte totale du milieu peut se décomposer en deux composantes : la contrainte du squelette et la pression du fluide. Cette relation est appelée équation de Terzaghi.
- Le milieu satisfait l'équation d'équilibre.

- L'écoulement de la résine dans le milieu poreux saturé est caractérisé par la loi de Darcy.
- La masse du fluide et la masse du solide se conservent.

Dans les chapitres suivants, les équations de la consolidation seront adaptées pour résoudre particulièrement des problèmes ayant lieu dans des procédés de mise en forme des composites par injection-compression.

Chapitre 2

Simulation of Compression Resin Transfer Molding with Displacement Control

Xuan-Tan PHAM, François TROCHU and Raymond GAUVIN

Center for Applied Research on Polymers

Mechanical Engineering Department

École Polytechnique of Montréal

Canada

2.1 PRÉSENTATION DU CHAPITRE

Le procédé de moulage par transfert de résine (RTM) est une technique de mise en forme des composites par injection sur renfort. Cette technique est beaucoup utilisée dans l'industrie. Une limitation de cette technique est la faiblesse du taux volumique de fibres dans la pièce finale. Une variante de cette technique appelée moulage par transfert de résine avec compression (CRTM) est présentée dans ce chapitre. Cette technique comprend deux phases : injection et compression. La préforme est partiellement remplie par la résine durant la phase d'injection. Puis, elle est comprimée par une paroi mobile du moule. La déformation du renfort et l'écoulement de la résine dans le renfort compressible sont décrits par les équations de la consolidation. L'écoulement de la résine est gouverné par la loi de Darcy. Un modèle bidimensionnel de la consolidation est

proposé dans cette étude. Un algorithme de remplissage basé sur la conservation de la masse de la résine est employé pour l'avancement du front de résine. La pression et la vitesse de la résine sont calculées par la méthode des éléments finis. La précision du modèle est vérifiée par l'évaluation de la conservation de la masse de résine, la distribution de la pression de la résine et l'avancement du front de la résine. Le modèle numérique est validé en comparant les résultats numériques avec une solution analytique.

2.2 ABSTRACT

In this paper, a mathematical model of two-dimensional resin flow through fiber reinforcements in compression resin transfer molding (CRTM) is presented. The preform is partially filled by resin during the injection phase. Then it is compressed by the mobile upper part of the mold. The resin flow in the fiber bed is governed by Darcy's law according to the theory of flows in saturated porous media. The consolidation of the saturated preform is described by the total mass conservation equation. A filling algorithm based on resin conservation on a deformable grid is used to advance the flow front at each time step. Resin pressure and velocity are calculated by the finite element method. The accuracy of the model is verified by evaluation of the resin mass balance, calculation of the resin pressure and progression of the flow front in time. Comparison of predicted results with analytical solutions is also presented.

KEYWORDS : CRTM, consolidation, finite elements, filling algorithm.

2.3 INTRODUCTION

Resin Transfer Molding (RTM) has a large scope of applications in composite manufacturing, above all in automotive and aeronautical industries. In the RTM process, the preform is set in the mold, then resin is injected in the reinforcement. After curing, the composite part is removed from the mold.

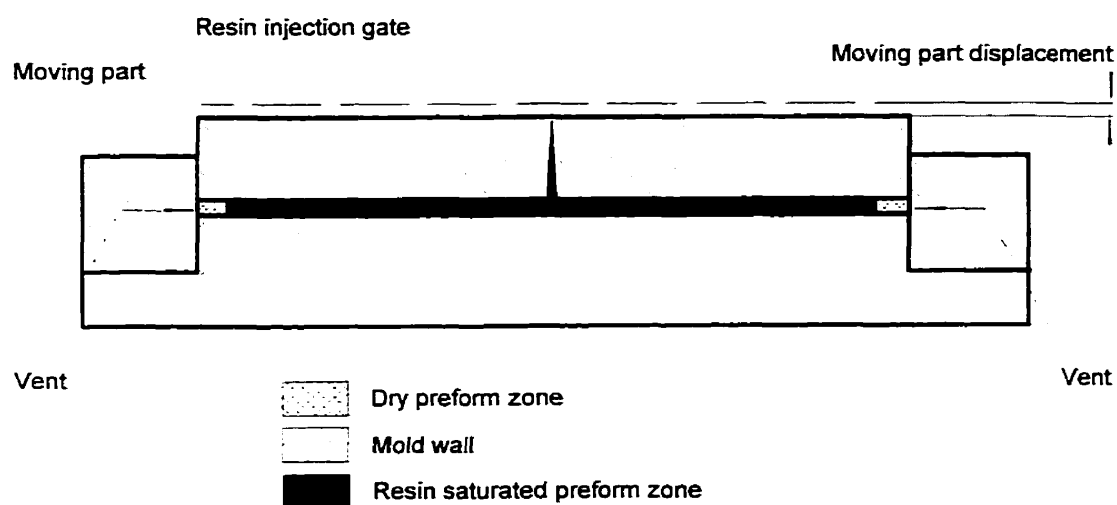


Figure 2.1. Schematics of the CRTM process.

One present limitation of the RTM process is the quality of the parts for high volume fractions in which “dry spots” are often observed. This problem may be avoided by increasing the resin pressure at the end of mold filling [18]. For this purpose, the resin injected in the fiber reinforcement during the injection phase is compressed by the mobile upper part of the mold until the preform is filled completely by the resin. This technology called “Compression Resin Transfer Molding” (CRTM) involves two stages: the injection phase and the compression phase. Figure 2.1 depicts the schematics of the CRTM process. In the injection phase, a given resin quantity is injected into the mold through the injection gate. Then, during the compression phase, the resin is compressed

under a higher pressure by the displacement of the upper part of the mold. In comparison to RTM, the CRTM process permits to obtain composite parts of greater quality because the resin pressure can easily reach a higher value during the compression phase. The high pressure is intended to squeeze the remaining air out of the mold, eliminate the voids in the final products and make them of uniform and better quality. During compression of the mobile wall, the fiber reinforcement is deformed and the resin, squeezed out of the saturated preform, enters into the dry reinforcement zone and gradually fills up the cavity. This phenomenon is called “consolidation”.

Apart from RTM and CRTM, there exist many other processes with a stage where the saturated reinforcement is compressed such as SMC, laminate composites etc. Many analytical models can be found in the literature. The model proposed by Springer et al. [21, 28] considers resin flow as the sole mechanism generating pressure between the mold plates. Other models by Gutowski et al. [14, 15] and Dave et al. [5] assume that resin pressure is generated from both the deformation of the reinforcement normal to their plane and the viscous flow of the resin. The deformation of the reinforcement under the resin flow is also observed by Jönsson and Jönsson [19, 20], Trevino et al. [31] and Parnas et al. [22].

Our objective is to model the resin flow in a deformable reinforcement in the CRTM process. Firstly, a fundamental study of the consolidation is presented in Annexe I. The general form of the continuity equation of the consolidation problem is demonstrated. Then, based on this theory, the consolidation equations adopted to model the CRTM process are presented.

In the CRTM process, during the compression phase, the motion of the upper part of the mold may be controlled either by the velocity or by the applied pressure. In this paper, the two-dimensional CRTM process controlled by the displacement velocity is analyzed and solved by the finite element method. A numerical algorithm permits to simulate the

progression of the resin front of the CRTM process. The advancement of the resin on the front is achieved by a filling algorithm based on the resin mass conservation.

2.4 CONSOLIDATION THEORY

The fiber consolidation in CRTM is very similar to that of water-saturated soils which have been studied very early in soil mechanics by Biot [3], Taylor [29] and many other authors. In these studies, the fundamental theory of Biot [3] has been used. This theory considers the soil deformations as infinitesimal with an elastic or elasto-plastic material behavior. The consolidation of water-saturated soil is described by the total mass conservation equation and the stress equilibrium equation. The water flow in a deformable porous medium is characterized by Darcy's law. The continuity equation from Biot consolidation theory has the following form :

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \tilde{\nabla} p \right) = -\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} \quad (2.1)$$

where \mathbf{K} is the permeability tensor of the porous medium, μ is the fluid viscosity, p the fluid pressure and ε_{vol} the volumic dilatation of the porous medium. Based on this theory, Rendulic [2] has proposed a theory of the consolidation by assuming that the octahedral normal stress $\sigma_{oct} = 0$, and Terzaghi [30] has proposed another theory by considering that the consolidation is one-dimensional and that the stress in this direction is constant.

In composite manufacturing, Dave et al. [4], Gutowski et al. [14-16] have studied consolidation for laminate composites and Phelan [24] for injection/compression liquid composite molding. In these studies, the consolidation of the reinforcement in the direction of compaction was studied. Dave et al. have used the same equations of consolidation as Biot. Gutowski et al. and Phelan have proposed another form of

continuity equation to model consolidation. In fact, both continuity equations are two different forms of the total mass conservation equation introduced in Annexe I. One corresponds to an infinitesimal fiber grid deformation problem like in Biot's formulation (equation I.36 of Annexe I) and the other stands for the general consolidation problem (equation I.24 of Annexe I). Because the soil deformation is small, Biot's formulation of the continuity equation is appropriate in soil mechanics. On the contrary, in composite manufacturing the deformation of the fiber reinforcement can reach up to 20% and sometimes more, so that it cannot be considered as infinitesimal. The general formulation is more adequate in liquid composite molding. Gutowski et al. [14-16] has employed it to model the consolidation of composite laminates, and Phelan [24] has proposed for injection/ compression a form of continuity equation very close to the general equation. However, Dave et al. [5] has used a derivation of the Biot's formulation to study the consolidation of composite laminates.

The consolidation of a fiber bed partially filled by resin is governed by three main equations : Darcy's equation which models the resin flow, Terzaghi's relation which gives the stress relation in the saturated porous medium and the continuity equation.

2.4.1 Resin Flow

The resin used in composite manufacturing is considered as a Newtonian fluid. The resin flow in the fiber bed is characterized by the Reynolds number, defined as $Re = vK^{1/2} / \eta$ where v is the resin velocity, K the characteristic permeability of the porous medium and η the fluid kinematic viscosity. For a low Reynolds number ($Re < 1$), the resin flow in saturated porous media is laminar and governed by Darcy's law. This law relates the fluid flow rate to the pressure gradient, fluid viscosity and permeability of the porous medium. The application of Darcy's law to model the flow of a moderately viscous resin

in a porous fiber bed has been validated by many authors [7, 11, 13]. In RTM and CRTM, the value of Re is usually less than 1 [23, 33], so that Darcy's law can be used :

$$\bar{v}^r = -\frac{\mathbf{K}}{\omega\mu} \bar{\nabla} p \quad (2.2)$$

where \bar{v}^r is the resin interstitial velocity, \mathbf{K} the permeability tensor, ω the porosity of the porous medium and μ the dynamic viscosity of the resin.

2.4.2 Terzaghi's Relation

It is assumed that in the resin-saturated zone Terzaghi's relation is valid, i.e., the total stress is equal to the sum of the fiber bed stress and the resin pressure

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} p \quad (2.3)$$

where σ_{ij} is the total stress, σ'_{ij} the fiber bed stress, δ_{ij} the unit tensor and p the resin pressure.

2.4.3 Continuity Equation

During the consolidation, both the solid and fluid phases are deformed, but their proper masses do not change. By combining the continuity equations of each phase, the final equation of total mass conservation [1] is obtained :

$$\text{div}(\omega \bar{v}^r) + \text{div} \bar{v}^s = 0 \quad (2.4)$$

where \bar{v}^r , the relative resin velocity with respect to the fiber grid, is given by (2.2). The second term can be evaluated by the following relation :

$$\text{div} \bar{v}^s = \frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} \quad (2.5)$$

where \bar{v}^s is velocity of the fiber grid particle. Let \bar{v}^f be the absolute velocity of the fluid particle, then the following relation holds :

$$\bar{v}^f(x, t) = \bar{v}^r(x, t) + \bar{v}^s(x, t) \quad (2.6)$$

By substituting (2.2) and (2.5) in (2.4), the continuity equation of the resin flow in the deformable reinforcement is obtained :

$$\nabla \cdot \left(-\frac{K}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} \quad (2.7)$$

where dv is the elementary volume in the deformed configuration. Note that this equation is always valid even if the fiber grid undergoes large deformations. Annexe I presents in detail the total mass conservation equation for general consolidation problems.

2.5 COMPACTION OF THE PREFORM

The compaction of fiber reinforcements has been studied by Gauvin et al. [12], by Gutowski et al. [14] and by Robitaille et al. [25-27]. These results show that fiber preforms undergo great deformations and behave as a nonlinear visco-elastic material. The characteristics of this complex behavior may vary from one material to the other. Analytical models have been proposed by many authors as summed up in the review of Robitaille et al. [25]. Nevertheless, the behavior of fiber reinforcements has not been studied as well as that of classical metallic materials. The only experimental information available is the results of one-dimensional compaction tests. Experimental results reveal that the compaction effect in the direction normal to the reinforcement plane is much more important than in the plane itself. This observation does not change when the lateral sides of the reinforcement are free or closed by the mold walls as in oedometric tests [27]. This implies that deformations and stresses in the plane are negligible in front of axial deformations and stresses through the thickness of the preform. In most cases,

the reinforcement is only compressed through the thickness, therefore it is generally considered that the consolidation of the preform is a one-dimensional phenomenon and characterized by an experimental pressure-deformation curve. However, the flow in the cavity is a three-dimensional phenomenon.

2.6 PERMEABILITY OF THE FIBER REINFORCEMENT

Assuming that the resin flow in fiber bed obeys to Darcy's law, then the permeability quantifies the conductivity of this porous medium, i.e., the relative facility of impregnation of the preform by the resin. Permeability is a tensorial parameter. An isotropic porous medium has the same permeability in all directions. In most cases in composite manufacturing, the fiber reinforcement is orthotropic and the permeability tensor has three components K_1 , K_2 and K_3 in three orthogonal principal directions. The permeability of a porous medium may be determined by an analytical model or by experiments. It appears that an analytical permeability model may be used, but its scope of application remains very limited. Some authors even warn to be very careful before using such a model [8]. In fact, an analytical model is rarely close to experimental results, because the actual porous medium structure is really more complicated than the analytical model. In this paper, the permeability tensor was measured following the procedure described in [7, 11, 13]. Experimental results show that the preform permeability is a nonlinear function of porosity [7]. Permeability-porosity curves characterize how a preform can be filled for various fiber volume fractions. Note that the permeability of the reinforcement is only measured in its principal directions. The matrix of this permeability tensor is diagonal. If the principal directions of fiber bed do not coincide with the reference system, the matrix is not diagonal any more. The new matrix is calculated from the diagonal matrix by a simple rotation of the reference system.

2.7 INJECTION WITH COMPRESSION BY DISPLACEMENT OF THE UPPER PART OF THE MOLD

We study now the CRTM process in the rectangular mold depicted in Figure 2.1. The resin is injected in the mold by an injection line gate in the middle of the mold. A single layer of reinforcement is compressed by the upper part of the mold which is controlled by the displacement velocity. In the sequel, only the compression phase is analyzed in detail. The injection phase is simpler and can be considered as a particular case of compression with a null compression velocity. This kind of control presents the advantage of determining the duration of the filling process. The displacement of the upper part is chosen to fill the cavity and avoid a premature conversion of the resin during injection. Let U be the velocity of the upper part of the mold. It may be constant or not. It is assumed that the fiber bed deformation only happens in the compaction direction and that this deformation is uniform through the thickness of the preform. The continuity equation (2.7) in this case may be written as

$$\nabla \cdot \left(-\frac{K}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{U}{h(t)} \quad (2.8)$$

where $h(t)$ is the preform thickness at time t . At a given time, the resin pressure in the saturated domain is completely determined by equation (2.8) with its boundary conditions. By solving this equation and using Darcy's equation (2.2), the resin pressure and velocity are obtained when the fluid is squeezed out of the saturated domain.

Figure 2.1 shows the mold cavity in which the preform is set up beforehand and considered as a deformable porous medium. The problem of Figure 2.1 is symmetric, so it is sufficient to analyze just one half of the mold. In Figure 2.2, the mold cavity is discretized by a regular mesh of triangles. At a given time, there are two zones. One is already filled by resin (saturated zone), and the other one contains only the dry preform (empty zone). Here, it is assumed that the domain containing the resin at a given time is

formed by a completely saturated part named D_α and a partially saturated one named F_α . The resin content of each element is characterized by a filling factor f , which is defined as the ratio between the resin volume and the empty volume of this element. Hence the value of f for a completely saturated element and an empty one are respectively 1 and 0. A partially saturated element has a value of f between 0 and 1. During the compression, the resin squeezed out of D_α will enter into F_α . The resin progression can be determined by an iterative algorithm. For each iteration, two stages are considered. First, the resin velocity is calculated on the flow front. Then, a filling algorithm is used to advance the resin front. The procedure repeats until the mold is completely filled by resin.

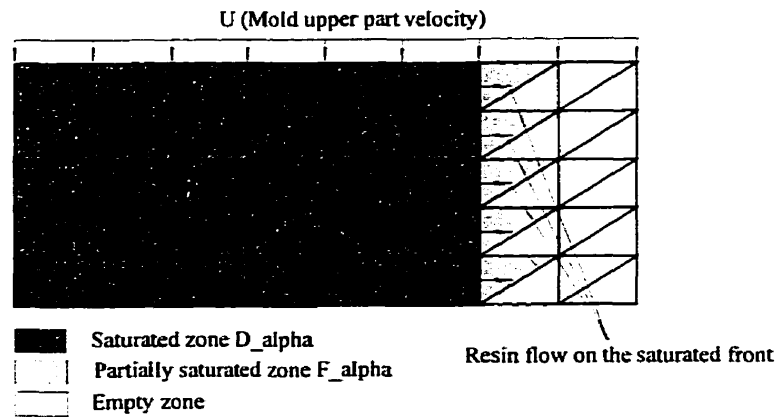


Figure 2.2. Numerical schematics of mold cavity with a regular triangular mesh.

2.7.1 Numerical Algorithms

RTMflot is a software developed at Ecole Polytechnique of Montreal to simulate the RTM process [32]. It contains two processing options : the presimulation without Darcy's law and the simulation with Darcy's law. The presimulation calculates the resin front progression based on a balance of the resin mass. The main purpose of this tool is

to obtain rapidly a first picture of the overall filling pattern in the mold and to check the simulation parameters before performing a complete analysis. The simulation, in turn, permits to obtain the resin front advancement based on the resin velocity calculated by Darcy's law.

2.7.1.1 Simulation

Based on the algorithm for RTM, a new resolution algorithm was devised for CRTM. It is presented in Figure 2.3 and includes both the injection and compression phases. First, all the necessary parameters need to be set. Starting with the injection phase, all domains D_α , F_α are initiated where D_α and F_α are defined above. Boundary conditions are determined. The resin pressure or resin flow rate is imposed at the injection port. At the mold walls, the normal resin velocity is zero. And a null pressure is imposed at front. The resin pressure is calculated in the saturated domain D_α by solving (2.8) with U null, then the resin velocity is derived from (2.2). By combining the velocity and the front area, the resin flow rate on the front is obtained. The time of each iteration is chosen so that at least one new element becomes fully saturated. The injection stops when the preset resin volume has been injected in the mold. This quantity depends on the total volume of the mold cavity and on the initial and the final porosities of the fiber bed. At the end of the injection phase, the injection gate is closed. The upper part of the mold moves down with a speed U . Because of the complexity of the problem, the time increment during the compression phase cannot be chosen explicitly as in the injection phase. The simulation is very long if the time increment is too small, but it must be small enough to provide an accurate approximation. The resin pressure is calculated over the saturated domain D_α by solving equation (2.8) with a zero normal resin velocity at the mold walls and a null pressure on the front as boundary conditions. Recall that on the moving wall of the mold, the resin and fiber particles have a common movement, so the relative resin velocity with respect to fiber bed vanishes on this boundary. Finally, the

resin flow squeezed out of the saturated domain is calculated from (2.2). The deformation of the fiber bed under compression is determined. The preform geometry and its characteristic parameters, i.e., porosity and permeability, are updated. The resin flow rate on the front is determined in this new configuration. A new saturated domain is obtained and the procedure repeats until the mold is completely filled.

2.7.1.2 Presimulation

Figure 2.4 shows the numerical algorithm of the presimulation. The difference between this algorithm and the simulation one presented above is how the resin flow rate is calculated on the front. In the simulation, the consolidation equations are solved to determine the resin velocity in the saturated domain in each iteration. The resin flow rate on the front is calculated from the velocity of the resin. In the presimulation, only one physical law, i.e., the resin mass conservation is employed. During the injection phase, the resin flow rate on the front is equal to the total flow rate at injection port and during the compression phase, this quantity is equal to the compressed volume of the saturated zone. The distribution of the resin flow on the front may be obtained by three different ways : (i) it may depend on the filling factors of the unsaturated elements on the resin front; (ii) it can be distributed equally everywhere on the resin front; (iii) or it can be deduced from directional areas of the unsaturated elements on the resin front. This concept was originally proposed for RTM simulation in [32] and [9]. The presimulation is not always physically precise. But its advantages are to give quickly a first approximate picture of the filling pattern and to check if all the parameters of the simulation are correct before running a complete analysis. This tool is helpful because the execution time of a simulation based on Darcy's law is usually long, especially when the mesh contains a large number of elements. In fact, for simple cases with the symmetry of the geometry and of the injection gate, the presimulation can give a result very close to Darcy's simulation ones.

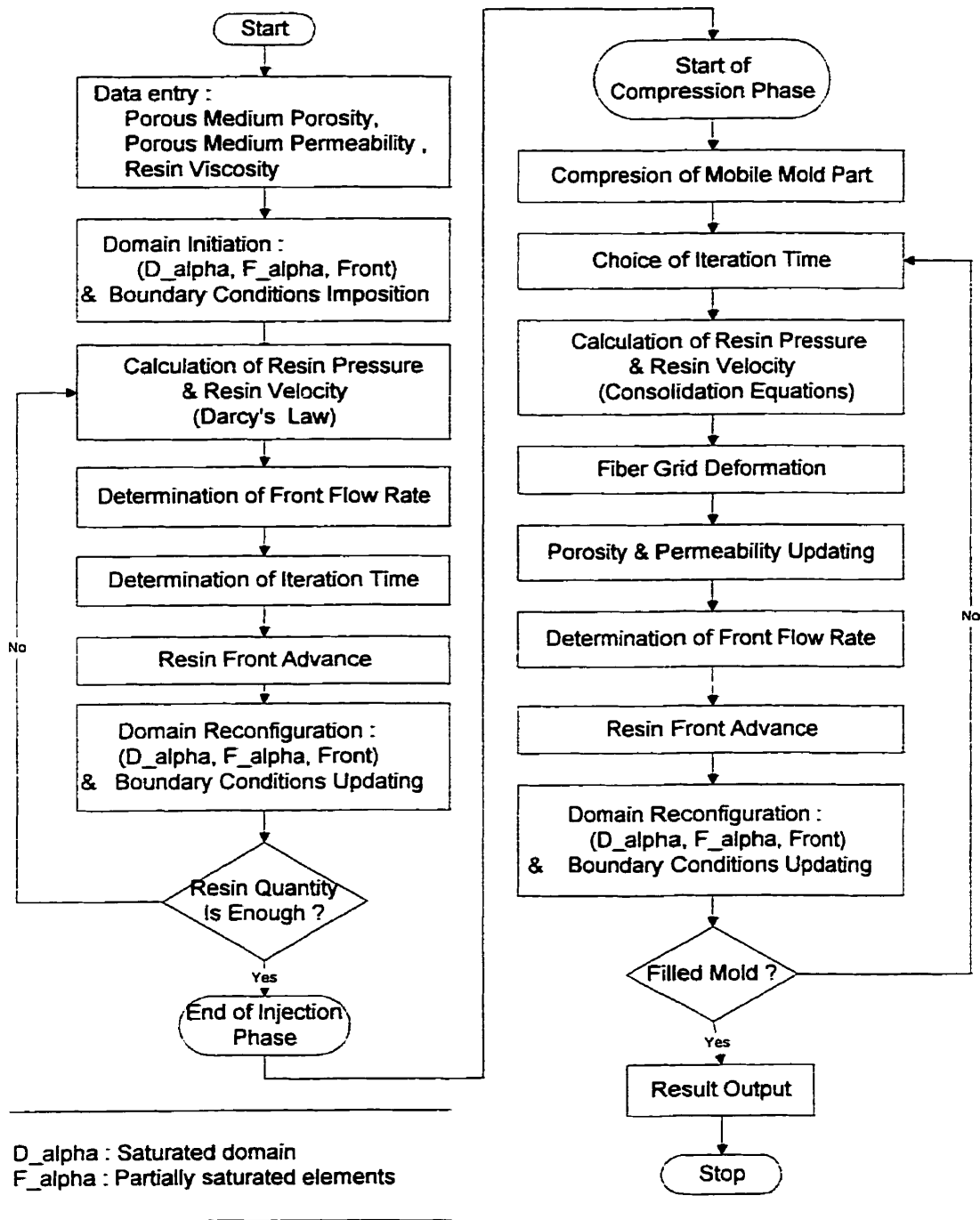


Figure 2.3. Numerical algorithm for the simulation of the CRTM process.

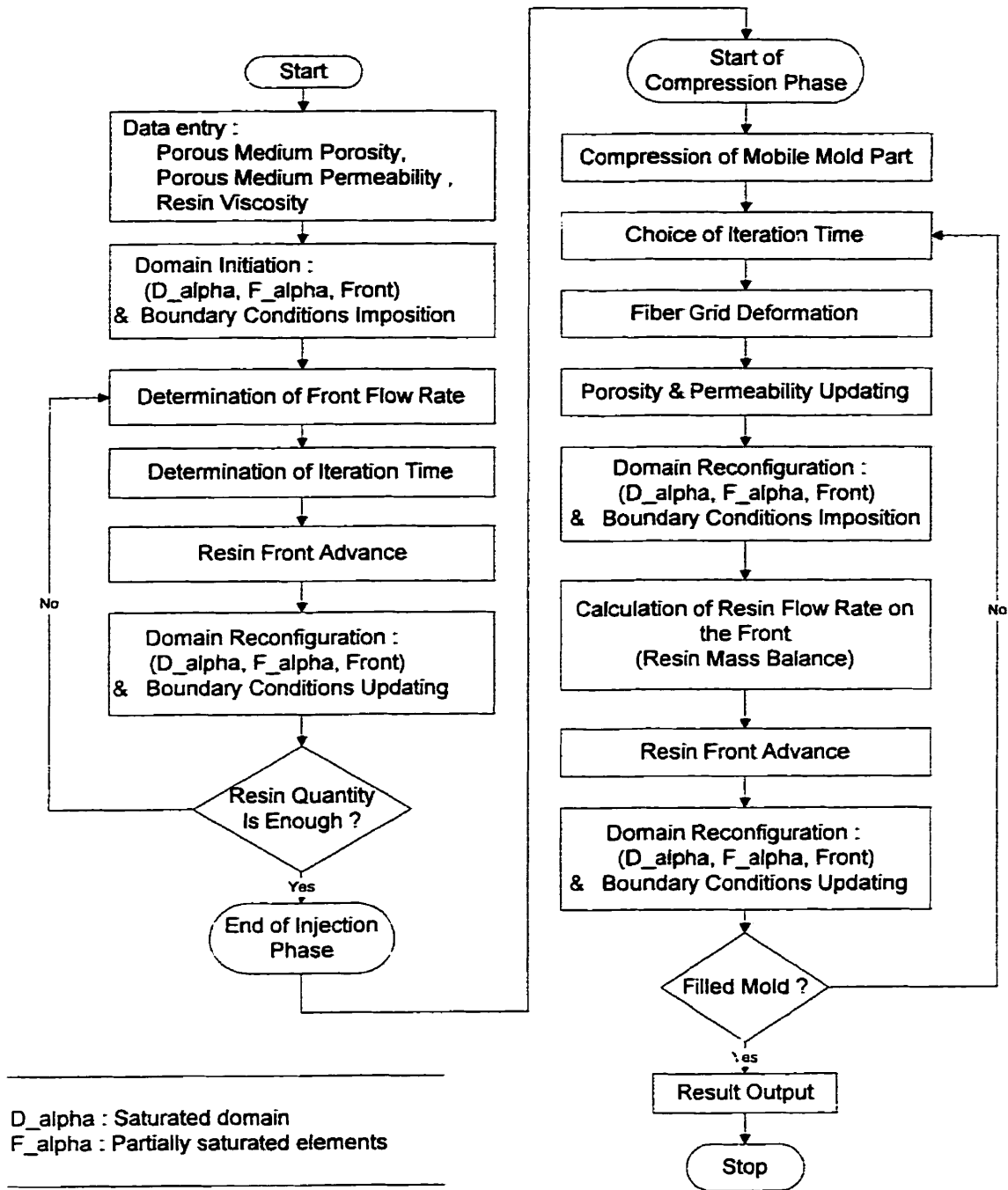


Figure 2.4. Numerical algorithm for the presimulation of the CRTM process.

2.7.2 Finite Element Method for Two-Dimensional CRTM

The consolidation problem of compression of the fiber bed and the two-dimensional resin flow will be analyzed. The continuity equation (2.8) is solved by the finite element method.

2.7.2.1 Variational Formulation of the Continuity Equation

Let \hat{p} denote the test functions corresponding to pressure and Ω the calculation domain, the weighted-integral formulation of the continuity equation is written as follows :

$$\int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Omega} \hat{p} \left(-\frac{U}{h(t)} \right) d\Omega \quad (2.9)$$

Integrating (2.9) by parts gives the weak form (variational form) of this equation

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) \bar{n} dS + \int_{\Omega} \hat{p} \left(\frac{U}{h(t)} \right) d\Omega \quad (2.10)$$

where \bar{n} is the normal vector of the boundary surface Γ . On the boundary, there are two zones : Γ_1 is the part where a given pressure is imposed, and Γ_0 the part where the condition $\bar{v}^r \cdot \bar{n} = v_n$ is specified. The test function \hat{p} vanishes on Γ_1 . Then (2.10) may take the following form :

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Gamma_0} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) \bar{n} dS + \int_{\Omega} \hat{p} \left(\frac{U}{h(t)} \right) d\Omega \quad (2.11)$$

The term $(-\mathbf{K}/\mu) \bar{\nabla} p \cdot \bar{n}$ in the first integral of the right member represents the natural boundary condition of the problem. Here the pressure is the primary variable and $\bar{v}^r \cdot \bar{n}$ is the secondary variable.

2.7.2.2 Finite Element Method

The finite element method divides the full domain into many subdomains called elements. For each element the weak form (2.11) is applied. By choosing $p = N_j p_j$ and $\hat{p} = N_i$ where N_j are interpolation functions on each element and p_j are the pressure values at the degrees of freedom, then we get

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x_l} \bar{e}_l = \frac{\partial N_j}{\partial x_l} p_j \bar{e}_l \quad (2.12)$$

$$\nabla \hat{p} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_m} \bar{e}_m = \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \bar{e}_m \quad (2.13)$$

For the left member of equation (2.11), we can write, by considering that the viscosity μ is constant on each element,

$$\int_{\Omega_e} \nabla \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Omega_e} -\frac{1}{\mu} \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \mathbf{K}_{ml} \frac{\partial N_j}{\partial x_l} p_j d\Omega = \int_{\Omega_e} -\frac{1}{\mu} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \{p_n\} d\Omega \quad (2.14)$$

where $\mathbf{B}_{lj} = \partial N_j / \partial x_l$ and $\{p_n\}$ is the vector of nodal pressures. The matrix $\mathbf{K}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B}$ is called stiffness matrix. The right member of (2.11) can be written

$$\int_{\Gamma_e} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) \bar{n} dS + \int_{\Omega} \hat{p} \left(\frac{U}{h(t)} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i v_n dS + \int_{\Omega} N_i \left(\frac{U}{h(t)} \right) d\Omega = Q_i^e \quad (2.15)$$

The substitution of (2.14) and (2.15) in (2.11) gives the elementary equations of each element. By assembling all elementary equations, one obtains the global system of the problem in matrix form

$$[\mathbf{A}] \{p_n\} = \{Q\} \quad (2.16)$$

The solution of this system gives the approximate pressure value at all degrees of freedom of the mesh.

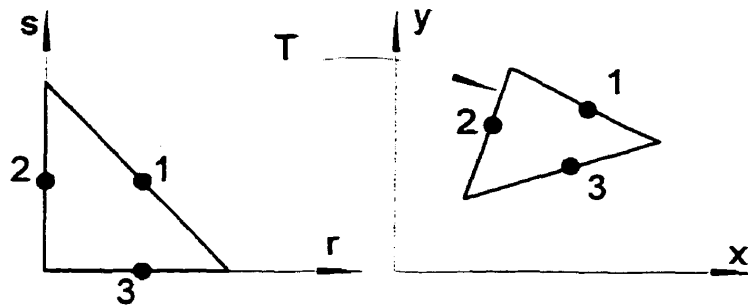


Figure 2.5. Two-dimensional non conforming triangle with 3 nodes.

2.7.2.3 Discretization with 3 Nodes Non Conforming Triangle

The non conforming triangle with 3 nodes as shown in Figure 2.5 is used to discretize the mold cavity. The pressure is piecewise linear on each element of the mesh. This kind of element is chosen because it satisfies locally the important physical condition of resin mass conservation across inter-element boundaries. Trochu et al. [32] demonstrated that this element yields good results to solve Darcy's equation in the RTM process. This element has three degrees of freedom in the middle of its edges. The interpolation functions of this element and their derivatives are shown in Table 2.1.

Table 2.1. Interpolation functions of the non conforming triangle with 3 nodes.

Nodes	Interpolation Functions $\{N\}$	Derivatives of Interpolation Functions $\{\partial N/\partial r\}$	Derivatives of Interpolation Functions $\{\partial N/\partial s\}$
1	$-1 + 2r + 2s$	2	2
2	$1 - 2r$	-2	0
3	$1 - 2s$	0	-2

2.8 NUMERICAL TESTS

Figure 2.6 shows the cavity used for the CRTM simulation. The dimensions of the cavity are 0.5m x 0.1m x 0.02m. A single layer of preform is set inside the mold. Four fiber reinforcements were employed in these tests : mat 750, mat 400, fabric JB81053 and fabric JB82675. The permeability of these materials was measured experimentally for different fiber volume fractions and then fitted into a curve of permeability as a function of porosity as shown in Figures 2.7, 2.8 and 2.9.

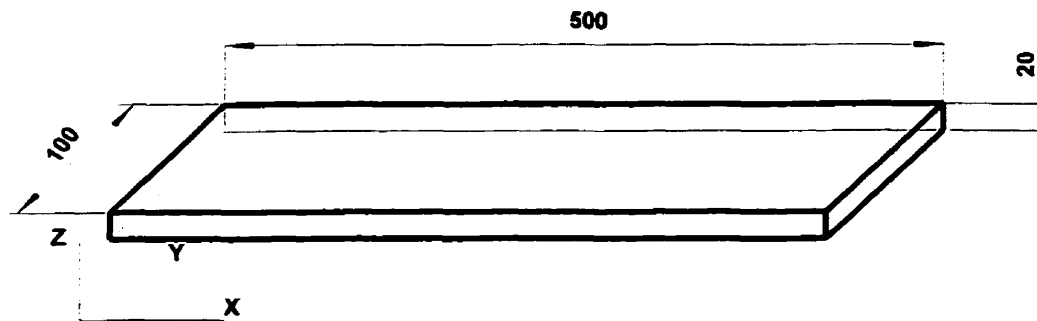


Figure 2.6. Dimensions of the cavity.

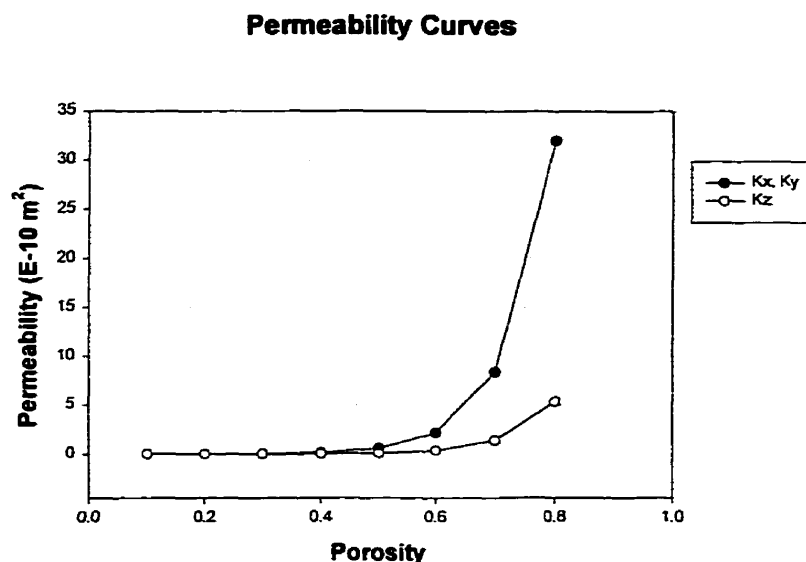


Figure 2.7. Permeability curves for the mat 750 (Unifilo random glass U750).

The initial and final porosities are respectively 0.7 and 0.65. In the injection phase, the resin is injected by a line gate at the left of the mold with a constant pressure of 0.3 MPa. The resin viscosity is 0.16 Pa-s. At the end of injection, the injection gate is closed, then the preform is compressed by the mold with a velocity U . In these tests, U has three values : 0.08 mm/s, 0.4 mm/s and 0.8 mm/s. The boundary conditions during the injection and compression phases are presented in Figure 2.10.

Permeability Curves

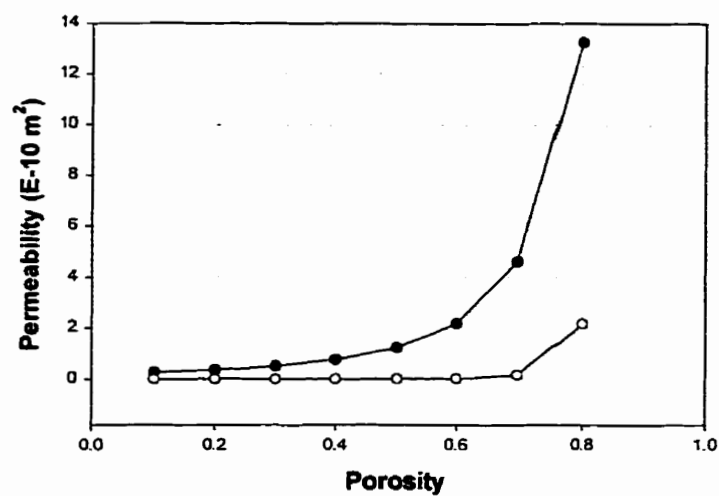


Figure 2.8. Permeability curves for the mat 400.

Permeability Curves

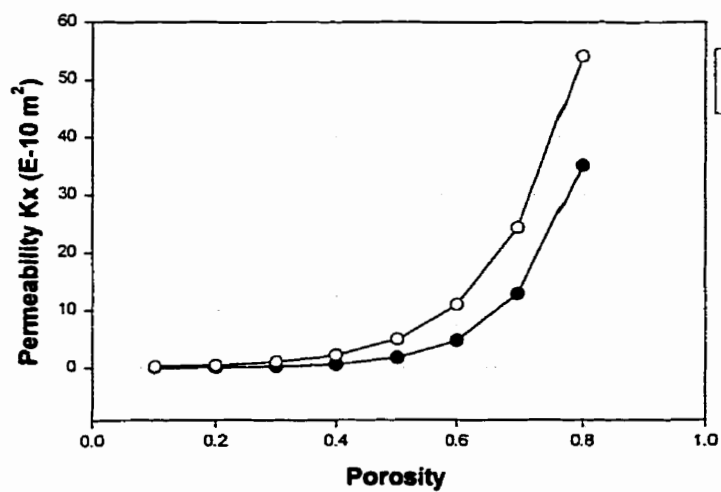


Figure 2.9. Permeability curves for fabrics JB81053 and JB82675 (J.B Martin Co.).

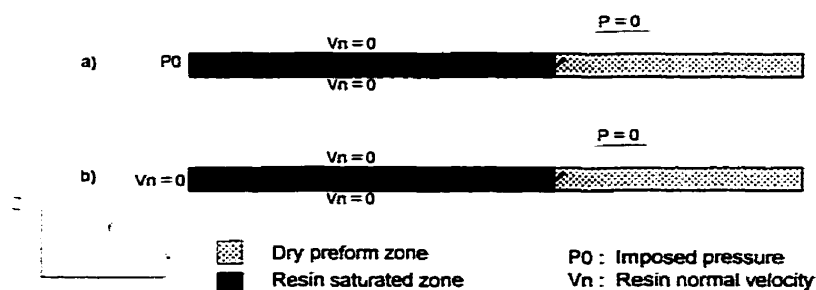


Figure 2.10. Boundary conditions
 (a) during the injection phase; (b) during the compression phase.

Table 2.2 shows the injection parameters used for the different simulations. For each material, three CRTM simulations are performed as well as a RTM simulation. The porosity of the preform used in the RTM test is equal to the final porosity of the part employed in the CRTM simulations.

Table 2.2. Simulation parameters of RTM and CRTM tests.

Simulations	Upper Part Velocity U (mm/s)	Preform Material	Porosity of the Preform	Resin Viscosity (Pa-s)	Injection Pressure (MPa)
RTM1	0.00	Mat 750	0.65	0.16	0.3
CRTM2	0.08	Mat 750	0.70 → 0.65	0.16	0.3
CRTM3	0.40	Mat 750	0.70 → 0.65	0.16	0.3
CRTM4	0.80	Mat 750	0.70 → 0.65	0.16	0.3
RTM5	0.00	Mat 400	0.65	0.16	0.3
CRTM6	0.08	Mat 400	0.70 → 0.65	0.16	0.3
CRTM7	0.40	Mat 400	0.70 → 0.65	0.16	0.3
CRTM8	0.80	Mat 400	0.70 → 0.65	0.16	0.3

2.9 RESULTS AND DISCUSSIONS

Simulation results depicted in Figures 2.11 and 2.12 show that the resin pressure curve in CRTM takes the shape of a parabola, whereas in RTM the resin pressure curve is linear for a rectilinear flow. The maximum value of the resin pressure increases linearly with the velocity U and may reach a very high value compared to the injection pressure of RTM. As a result, the resin filling in CRTM is easier than in RTM. Two reasons can explain this fact. First, the form of a parabola of the resin pressure during the compression phase gives a greater pressure gradient on front. Second, the maximum pressure of the resin during the compression is much higher than during the injection phase.

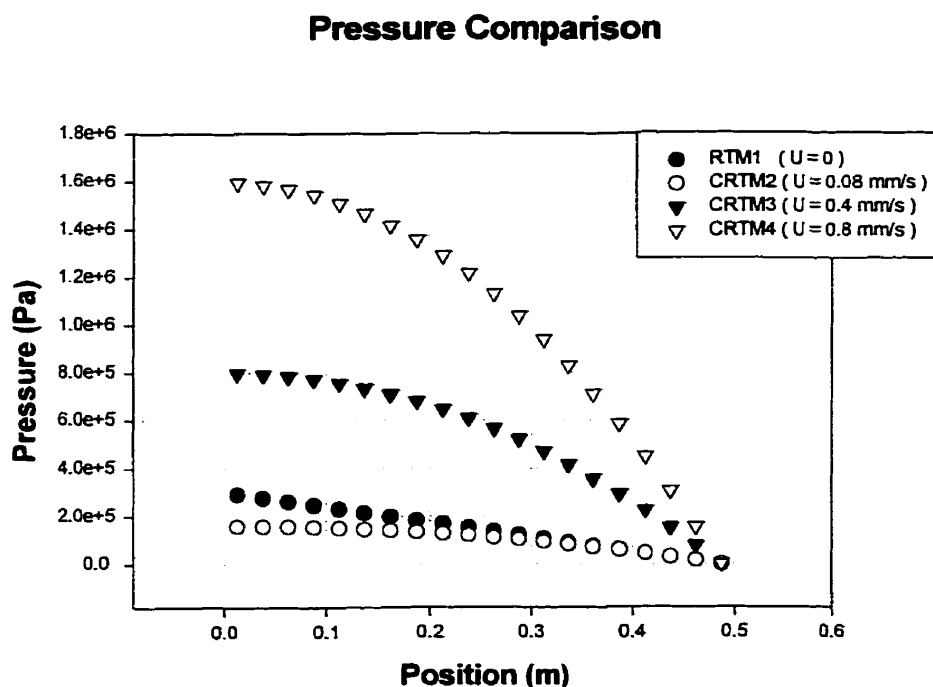


Figure 2.11. Comparison of resin pressure distribution between RTM and CRTM simulations for the mat 750.

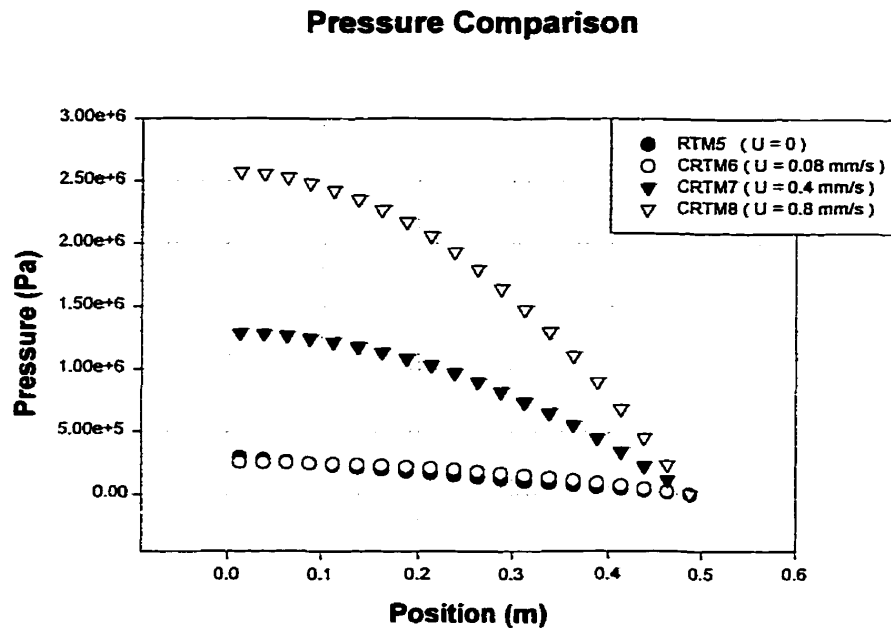


Figure 2.12. Comparison of resin pressure distribution between RTM and CRTM simulations for the mat 400.

Table 2.3 shows the comparison of filling times between RTM and CRTM for different compression velocities. The results indicate that CRTM simulation depends clearly on the value of the velocity U and on the preform material. On the one hand, for the mat 750, when the velocity U is small ($U = 0.08$ mm/s), the filling time of CRTM is slightly shorter than that of RTM. The maximum resin pressure in CRTM ($p = 0.2$ MPa) is even smaller than in RTM ($p = 0.3$ MPa). The resin pressure in CRTM increases strongly when the velocity U reaches 0.4 mm/s. The maximum resin pressure reaches 0.8MPa and the filling time decreases almost three times. The effect of the compression in this case is large both in terms of pressure and filling time. When the velocity U increases up to 0.8 mm/s. The maximum pressure reaches 1.6MPa, i.e., twice that of $U = 0.4$ mm/s, but the filling time is not improved very much. It means that the effect of the compression when increasing U from 0.4 mm/s to 0.8 mm/s is very weak in terms of time. On the other hand, for the mat 400, when the velocity U varies from 0.08 mm/s to

0.8 mm/s, the maximum pressure increases from 0.3MPa to 2.5MPa, but the filling time varies only from 1'37'' to 1'05''. The effect of compression in this case is large on the pressure, but very weak on the filling time. It is clear that increasing the velocity U permits to obtain a high value of pressure, but does not always bring an improvement on the filling process.

Table 2.3. Simulation filling times and maximum resin pressure.

Simulations	Upper Part Velocity U (mm/s)	Preform Material	Filling Time (sec)	Maximum Resin Pressure (MPa)
RTM1	0.00	Mat 750	1'20''	0.3
CRTM2	0.08	Mat 750	1'10''	0.2
CRTM3	0.40	Mat 750	0'41''	0.8
CRTM4	0.80	Mat 750	0'37''	1.6
RTM5	0.00	Mat 400	2'04''	0.3
CRTM6	0.08	Mat 400	1'37''	0.3
CRTM7	0.40	Mat 400	1'09''	1.3
CRTM8	0.80	Mat 400	1'05''	2.6

Now, it is known that when the ratio of the thickness over the length of the cavity is small (<0.05), and the transverse permeability of the reinforcement is small compared to the longitudinal permeability, the pressure gradient through the thickness is negligible in front of the in-plane pressure gradient. Hence the resin flow may be considered as one-dimensional through the fiber bed. This argument is employed to validate the 2D numerical model by comparing with the analytical 1D consolidation model in which the resin pressure distribution is calculated by equation (II.5) of Annexe II. Table 2.4 shows the differences between the maximum resin pressures calculated from both models in a set of numerical tests. These pressures are recorded when the resin front position is at 0.475 m. The tests were performed for the four materials mentioned above. Three different meshes with number of elements as 20×2 , 20×4 and 20×8 are used to demonstrate the influence of the mesh on the calculations. The results indicate that with

the ratio $K_z/K_x = 1/100$ the pressure difference is about 8% with the mesh 20 x 2. The difference goes down to 4% and then 1% with the meshes 20 x 4 and 20 x 8 respectively. It means that the transverse effect is really minor when K_z is small in front of K_x , that the result obtained from 2D numerical model converges to that of the analytical solution and that refining the mesh decreases remarkably the pressure difference between two models.

Table 2.4. Maximum pressure comparison between the 2D numerical model and the 1D analytical solution for $K_z/K_x = 1/100$.

	Pressure Difference		
	Mesh 20x2	Mesh 20x4	Mesh 20x8
Mat 750	7.2%	3.8%	1.2%
Mat 400	8.2%	3.1%	0.7%
JB81053	7.2%	3.0%	0.7%
JB82675	7.2%	3.0%	0.7%

Figures 2.13 and 2.14 depict the pressure curves of the 2D numerical model and the 1D analytical solution when the velocity is $U = 0.4$ mm/s for the mesh 20 x 8. These pressure curves also are taken when the resin front position is at 0.475 m. The resin pressure distributions agree well both qualitatively and quantitatively. It is seen that with the same compression parameters, the maximum pressures for the fabric JB 81053, fabric 82675, mat 750 and mat 400 are 0.23 MPa, 0.54 MPa, 0.8 MPa and 1.1 MPa respectively. It revealed that the permeability influences strongly on the resin pressure during the compression phase. The value $U = 0.4$ mm/s may be good enough for CRTM process with three last materials on compression effect, but not for CRTM process with JB 81053 because the maximum resin pressure is even smaller than the injection pressure ($p = 0.3$ MPa).

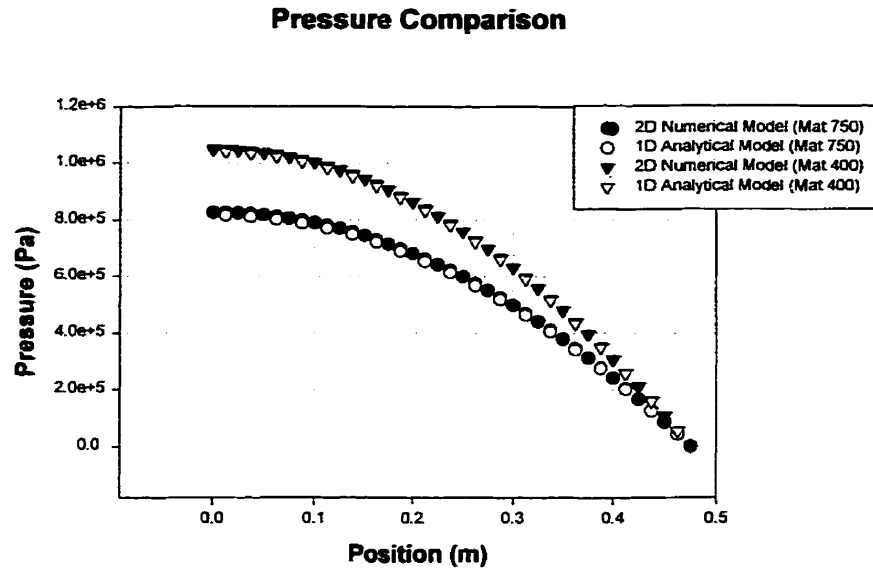


Figure 2.13. Pressure comparison between the 2D numerical model and the 1D analytical model (Mat 750 and Mat 400 with the velocity $U = 0.4$ mm/s and $K_z/K_x = 1/100$).

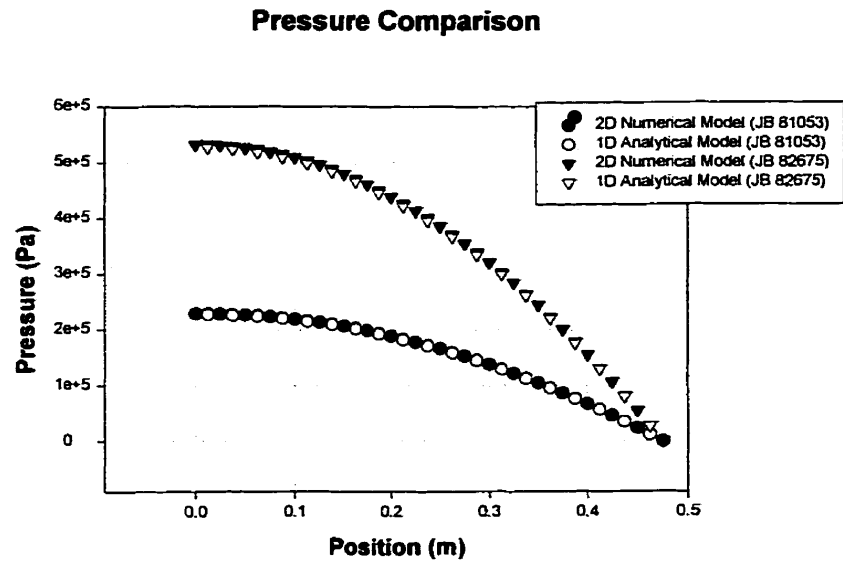


Figure 2.14. Pressure comparison between the 2D numerical model and the 1D analytical model (Mat JB 81053 and JB 82675 with the velocity $U = 0.4$ mm/s and $K_z/K_x = 1/100$).

2.10 CONCLUSION AND PERSPECTIVES

A synthetic study of the consolidation theory has been achieved to highlight the differences between the consolidation models used by many authors. From the total mass conservation of both the solid and fluid phases, we obtained the continuity equation for the general problem of the consolidation. We demonstrated that this equation is always valid even for large deformations of the porous medium. For infinitesimal deformation, another form of the continuity equation has been derived from the general equation. The flow of the fluid is characterized by Darcy's law which relates the flow rate (relative to the porous medium) to the pressure gradient, fluid viscosity and permeability of the porous medium.

A two-dimensional numerical model derived from the general continuity equation has been used for the CRTM process controlled by the displacement velocity. The consolidation of the preform is one-dimensional and the flow of the resin is two-dimensional. A resolution algorithm has been constructed to simulate the progression of the resin by an iterative procedure. The advancement of the resin on the front is done by a filling algorithm based on the resin mass balance. On the one hand, this algorithm is robust enough to keep the fact that the total quantity of the resin during compression phase remains always constant. On the other hand, the filling algorithm is capable to capture the change of the resin filling factor f before the filling caused by the deformation of the mesh as well as after the filling. The calculation procedure gives precise results. A good agreement for pressure between the 2D numerical model and the 1D analytical solution has been reached.

Results show that the resin pressure distribution in CRTM takes the shape of a parabola. Resin pressure increases linearly with the velocity U of the mobile upper wall of the mold. The maximum value of the resin pressure may become quite high in comparison to the injection pressure in RTM. The compression effect is strong on the pressure, but not

always on the filling time. This depends much on the preform material. The larger is the permeability, the greater reduction of filling time can be achieved by the compression. For a CRTM process, the choice of the velocity U depends on the physical parameters of the preform such as the permeability and compaction curves, on the viscosity of the resin and on the geometry of the mold. In addition, this choice must counter the fact that a high resin pressure demands a high quality mold and makes the CRTM process more expensive.

Till now, the non conforming 3 nodes C_0 triangle is used in the numerical calculation. For this element, the pressure is piecewise linear in each element and continuous at the boundary between two elements. Since the resin pressure in CRTM process takes the shape of a parabola, the non conforming 3 nodes C_1 triangle with a quadratic pressure in each element would be more appropriate.

The model presented in this paper permits only to analyze the resin pressure during compression. The total pressure including the reaction of the reinforcement has not been studied. The resin pressure and the compaction stress on the preform allow to determine the total reaction force applied on the upper part of the mold. It is necessary also to study the compaction of a multilayer preform and the effect of the compression on the filling of a part with a curved three-dimensional geometry.

2.11 NOMENCLATURE

B_{ij} interpolation function derivative matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)

D_{ij} deformation rate matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)

D_α completely resin saturated zone

F_α partially resin saturated zone

F_{ij} deformation gradient matrix ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$)

- G_{ij} velocity gradient matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- J deformation gradient matrix determinant
- K perméabilité en général
- \mathbf{K} permeability tensor of the porous medium
- \mathbf{K}^* stiffness matrix
- K_i permeability principal components ($i = 1, 2, 3$)
- \mathbf{K}_{ml} permeability matrix ($m = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$)
- N_j interpolation functions ($j = 1, 2, 3 \dots$)
- Re Reynolds number
- U velocity of the upper part of the mold
- W_{ij} rotation rate matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- dV elementary volume in the initial configuration
- dv elementary volume in the deformed configuration
- \bar{e}_l coordinate base vectors ($l = 1, 2, 3$)
- f filling factor
- f_{ij} displacement gradient matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- $h(t)$ preform thickness at time t
- p fluid pressure
- \hat{p} pressure test functions
- p_j pressure values at the degrees of freedom ($j = 1, 2, 3 \dots$)
- \bar{u} displacement vector of the solid particle
- \bar{v}^f absolute velocity of the fluid particle
- v_n fluid normal velocity
- \bar{v}^r relative interstitial velocity of the fluid particle
- \bar{v}^s velocity of the fiber grid particle
- x_m system coordinates ($m = 1, 2, 3$)
- $\bar{w}(x, t)$ fluid mass flow rate
- Γ boundary surface of the calculation domain
- Γ_0 boundary part where the condition v_n is specified

- Γ_1 boundary part where a given pressure is imposed
- Ω calculation domain
- δ_{ij} unit matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- ε_{vol} volumic dilatation
- $\dot{\varepsilon}_{ij}$ deformation rate matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- η fluid kinematic viscosity
- μ fluid dynamic viscosity
- ρ^f fluid specific mass
- ρ^s solid specific mass
- σ_{ij} total stress matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- σ'_{ij} fiber bed stress matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
- σ_{oct} octahedral normal stress
- ω porosity of the porous medium
- ω_0, ω_f initial and final porosity of the porous medium
- $\dot{\omega}_{ij}$ rotation rate matrix ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)

2.12 ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank gratefully to the Ministry of Education of Quebec Government and the National Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) for financial support. X.-T. Pham is grateful to Mr. Michel Soulié for his helps. J.B. Martin Co. is also acknowledged for providing the reinforcement.

2.13 REFERENCES

1. Bear, J. 1972. *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, Environmental Science Series.

2. Belkeziz A. and J. P. Magnan. 1982. *Analyse Numérique de la Consolidation Bidimensionnelle des Sols Élastoplastiques*, Ministère de l'Urbanisme et du Logement, Ministère des Transports, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France.
3. Biot, M. A. 1941. "General Theory of Three-Dimensional Consolidation", *Journal of Applied Physics* , 12:155-164.
4. Coussy, O. 1991. *Mécanique des Milieux Poreux*. Éditions Technip.
5. Dave, R., J. L. Kardos and M. P. Dudukovic. 1987. "A Model for Resin Flow During Composite Processing : Part 1 - General Mathematical Development", *Polymer Composites*, 8(1):29-38.
6. Dave, R., J. L. Kardos J. L. and M. P. Dudukovic. 1987. "A Model for Resin Flow During Composite Processing : Part 2 - Numerical Analysis for Unidirectional Graphite/Epoxy Laminates", *Polymer Composites*, 8(2):123-132.
7. Diallo, M. L., R. Gauvin, F. Trochu. 1997. "Key Factors Affecting the Permeability Measurement in Continuous Fiber Reinforcements", *Proceeding of ICCM-11*, Gold Coast, Australia, 14-18 July 1997, 4: 441-451.
8. Dullien, F. A. L. 1979. *Porous Media-Fluid Transport and Pore Structure*. Academic Press.
9. Ferland, P. 1994. "Simulation Numérique Non Isotherme du Procédé de Moulage par Transfert de Résine", *Mémoire de Maîtrise ès Sciences Appliquées*, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

10. Ferland, P. and F. Trochu. 1995. "A Few Words About Porosity and Darcy's Law", *RTMFLOT Bulletin*, **2**.
11. Ferland, P., D. Guittard and F. Trochu. 1996. "Concurrent Methods for Permeability Measurement in Resin Transfer Molding", *Polymer Composites*, **17**(1):149-158
12. Gauvin R., Y. Lemenn Y., P. Clerk P. and F. Trochu. 1994. "Compaction and Creep Behavior of Glass Reinforcements for Liquid Composites Molding", *10th ASM/ESD Advanced Composites Conference*, (June), pp. 357-367.
13. Gauvin, R., F. Trochu F., Y. Lemenn and M. L. Diallo. 1996. "Permeability Measurement and Flow Simulation Through Fiber Reinforcement", *Polymer Composites*, **17**(1):34-42.
14. Gutowski, T. G., Z. Cai, S. Bauer, D. Boucher, J. Kingery and S. Wineman. 1987. "Consolidation Experiments for Laminates Composites", *Journal of Composites Materials*, **21**:650-669.
15. Gutowski, T. G., T. Morigaki and Z. Cai. 1987. "The Consolidation of Laminate Composites", *Journal of Composites Materials*, **21**:172-188.
16. Gutowski, T. G., J. Kingery and D. Boucher, "Experiments in Composites Consolidation : Fiber Deformation", *ANTEC 86*, pp. 1316-1320.
17. Gutowski, T. G. 1985. "A Resin Flow/Fiber Deformation Model for Composites", *SAMPE Quaterly*, pp. 58-64.

18. Ikegawa, N., H. Hamada and Z. Maekawa. 1996. "Effect of Compression Process on Void Behavior in Structural Resin Transfer Molding", *Polymer Engineering and Science*, **36**(7): 953-962.
19. Jönsson, K. A. S. and B. T. L Jönsson. 1992. "Fluid Flow in Compressible Porous Media : I. Steady-State Conditions", *AIChE Journal*, **38**(9):1340-1348.
20. Jönsson, K. A. S. and B. T. L Jönsson. 1992. "Fluid Flow in Compressible Porous Media : II. Dynamic Behavior", *AIChE Journal*, **38**(9):1349-1356.
21. Loos, A. C. and G. S. Springer. 1983. "Curing of Epoxy Matrix Composites", *Journal of Composite Materials*, **17**:135-169.
22. Parnas, R.S., C. R. Schultheisz and S. Ranganathan. 1995. "Hydrodynamically Induced Preform Deformation During High Speed Processing", *ACCE 1995*, pp. 219-226
23. Pham, X.-T. 1997. Fabrication des matériaux composites par injection sur des renforts à taux de fibres variables, *Examen de Synthèse de Doctorat*, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.
24. Phelan, F. R. 1997. "Analysis of Injection/Compression Composite Molding", *ICAC97*, pp. 417-424.
25. Robitaille, F. and R. Gauvin. 1996. "Compaction of Fiber Reinforcements for Composite Manufacturing: A Review of Analytical Results", *Technical Report EPM/RT-96/19*, École Polytechnique de Montréal.

26. Robitaille, F. and R. Gauvin. 1996. "Measurement of the Compaction and Relaxation Properties of Wet/Dry Textile Reinforcements under Hydrostatic Pressure : Design of the Apparatus and Data Acquisition", *Technical Report EPM/RT-96/21*, École Polytechnique de Montréal.
27. Robitaille, F., R. Gauvin and P. Clerk. 1996. "Compaction of Fiber Reinforcements for Composite Manufacturing: A Review of Experimental Results", *Technical Report EPM/RT-96/04*, École Polytechnique de Montréal.
28. Springer, G. S. 1982. "Resin Flow During the Cure of Fiber Reinforced Composites", *Journal of Composite Materials*, **16**:400-410.
29. Taylor, D.W. 1948. *Fundamentals of Soil Mechanics*. John and Sons, New York.
30. Terzaghi, K. 1943. *Theoretical Soil Mechanics*. John and Sons, New York.
31. Trevino, L., K. Rupel, W. B. Young, M. J. Liou and L. J. Lee. 1991. "Analysis of RIM in Molds with Preplaced Fiber Mats 1: Permeability and Compressibility Measurements", *Polymer Composites*, **12**(1):20-29
32. Trochu, F., R. Gauvin R. and D. M. Gao. 1993. "Numerical Analysis of the Resin Transfer Molding by the Finite Element Method", *Advances in Polymer Technology*, **12**(4):329-342.
33. Wirth, S. and R. Gauvin. 1997. "Experimental analysis of reinforcement compaction for CRTM", submitted article.

Chapitre 3

Simulation of Compression Resin Transfer Molding to Manufacture Thin Composite Shells

Xuan-Tan PHAM and François TROCHU

Center for Applied Research on Polymers
Mechanical Engineering Department
École Polytechnique of Montréal
Canada

3.1 PRÉSENTATION DU CHAPITRE

L'écoulement de la résine dans le renfort fibreux déformable dans le procédé de moulage par transfert de résine (CRTM) a été présenté dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, un nouveau modèle dérivé du modèle général de la consolidation est utilisé pour le procédé CRTM. Ce modèle permet de modéliser la consolidation d'une pièce composite mince ayant une géométrie quelconque dans l'espace. Cette technique comprend deux phases : injection et compression. La préforme est partiellement remplie par la résine durant la phase d'injection. Puis, elle est comprimée par une paroi mobile du moule. La déformation du renfort et l'écoulement de la résine dans le renfort compressible sont décrits par les équations de la consolidation. L'écoulement de la résine est gouverné par la loi de Darcy. Un algorithme de remplissage basé sur la conservation de la masse de la résine est employé pour l'avancement du front de résine. La pression et

la vitesse de la résine sont calculées par la méthode des éléments finis. Dans cette étude, plusieurs paramètres du procédé CRTM sont analysés tels que la vitesse de compression de la paroi mobile, l'ouverture ou la fermeture du port d'injection. Le modèle numérique permet de calculer la distribution de la pression de la résine dans le moule. Les résultats numériques sont comparés avec les solutions analytiques et les résultats expérimentaux.

3.2 ABSTRACT

The resin flow through fiber reinforcements in Compression Resin Transfer Molding (CRTM) has been modeled by Pham et al. [1]. First the preform is partially filled by resin during the injection phase. Then it is compressed by the mobile part of the mold. The resin flow in the fiber bed is governed by Darcy's law. The consolidation of the saturated preform is described by the total mass conservation. A mathematical model is developed for thin curved composite parts. A filling algorithm based on resin conservation on a deformable grid is used to advance the flow front at each time step. Resin pressure and velocity are calculated by the finite element method. Several control parameters of the CRTM process are investigated in this study, such as the compaction speed of the mold upper wall, the injection pressure and the closing/opening of the injection gate. The numerical model allows the calculation of pressure distribution in the mold, which is compared with analytical solutions and experimental results.

3.3 INTRODUCTION

“*Resin Transfer Molding*” (RTM) has a large scope of applications in composite manufacturing. The preform is first set in the mold, then resin is injected in the reinforcement. After curing, the composite part is removed from the mold. One present limitation of the RTM process is the quality of the parts for high fiber volume fractions in which “dry spots” are often observed. This problem may be avoided by increasing the resin pressure [2]. For this purpose, the resin injected in the fiber reinforcement during the injection phase is compressed by the mobile part of the mold until the preform is completely filled by the resin.

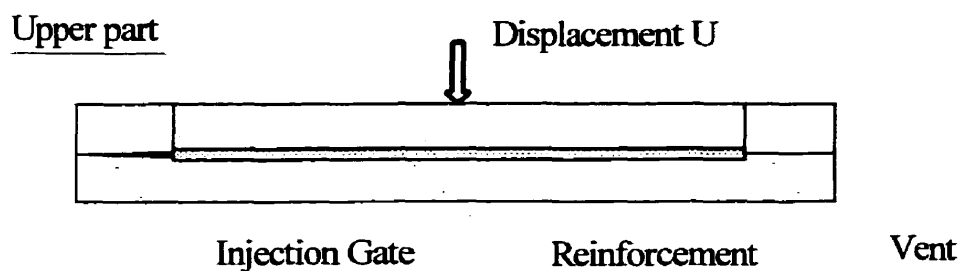


Figure 3.1. Schematics of the CRTM process.

This technology called “*Compression Resin Transfer Molding*” (CRTM) involves two stages: the injection phase and the compression phase. Figure 3.1 depicts the schematics of the CRTM process. During the injection phase, a given quantity of resin is injected into the mold through the injection gate. Then the preform is compressed under a higher pressure by the displacement of the upper part of the mold [1, 3, 4]. During this phase (compression phase), the fiber reinforcement is deformed, the resin is squeezed out of the saturated preform, and the remaining dry reinforcement zone is gradually filled up. This phenomenon is called “consolidation”.

In Pham et al. [1], a review on consolidation in soil mechanics and composite manufacturing was presented. This paper introduced also a general formulation of consolidation in order to model the CRTM problem. The differences between the consolidation models used by Phelan [3], Gutowski [5-6] and Dave [7-8] were discussed, and two derivations from the general formulation corresponding to small and large deformations respectively have been presented. A two-dimensional numerical model derived from the general continuity equation has been used for the CRTM process when the displacement of the mold wall is imposed. The consolidation of the preform is one-dimensional and the resin flow is two-dimensional. A numerical algorithm has been devised to simulate the progression of the resin by an iterative procedure. The advancement of the resin on the front is done by a filling algorithm based on the resin mass balance. A good agreement was observed between the pressure calculated by the two-dimensional numerical model and an analytical solution.

Most composite parts are thin sheets, with the in-plane dimensions usually much larger than the thickness. So they may be modeled as a shell. The present paper generalizes to thin shells the approach of Pham et al. [1] to simulate the CRTM process controlled by the displacement velocity of the mold upper part. The general continuity equation in compressible porous medium is analyzed and solved by the finite element method. Shell elements are used to discretize the domain. The resin flow occurs in a two-dimensional space. The consolidation of the preform happens in the thickness which is considered as an independent parameter of each element.

First, the experimental results of Wirth et al. [4] are compared with analytical and numerical solutions. Regular and non regular meshes with conforming and non conforming triangular elements are employed to study the sensitivity of the solution. Then, the results of 2D Cartesian numerical simulation is compared with the exact solution obtained in the cylindrical coordinate system. Finally, the numerical model

allows studying the effect of compression on the filling of a composite part for different compaction speeds, injection pressures or injection flow rates.

3.4 CONSOLIDATION THEORY

The consolidation theory has been studied in different domains, especially in soil mechanics. This theory is based on the mechanics of porous medium. A review on the applications of this theory was presented in Pham et al. [1]. Fundamental consolidation models in soil mechanics can be found in Biot [9], Terzaghi [10] and so on. In composite manufacturing, Gutowski et al. [5-6] and Dave et al. [7-8] have also studied the consolidation of composite laminates. Phelan [3] has worked more especially on injection/compression in liquid composite molding. In these studies, the consolidation of the reinforcement in the direction of compaction was studied. Dave et al. [7-8] have used the same equations of consolidation as Biot [9]. On the other hand, Phelan [3] and Gutowski et al. [5-6] have proposed another form of continuity equation to model consolidation. Pham et al. [1] have showed that all of these equations are derived from a general form of the mass conservation. The consolidation of a fiber bed partially filled by resin is governed by the five following equations: (a) Darcy's equation which models the resin flow, (b) Terzaghi's relation which gives the stress in the saturated porous medium, (c) the equilibrium equation between the total stress in the porous medium and the external forces, (d) the reinforcement constitutive law and finally, (e) the continuity equation of the mass conservation

3.4.1 Resin flow

The resin used in composite manufacturing is considered as a Newtonian fluid. The resin flow in the fiber bed is characterized by the Reynolds number, defined as $Re = uk^{1/2} / \eta$,

where u is the resin velocity, k the characteristic permeability of the porous medium and η the fluid kinematic viscosity. For a low Reynolds number ($Re < 1$), the resin flow in a saturated porous medium is assumed to be laminar and governed by Darcy's law. This law relates the fluid flow rate to the pressure gradient, fluid viscosity and permeability of the porous medium. The application of Darcy's law to model the flow of a moderately viscous resin in a porous fiber bed has been validated by many authors [11-14]. In RTM and CRTM, the value of Re is usually less than 1 [4], so that Darcy's law can be used:

$$\bar{v}^r = -\frac{\mathbf{K}}{\omega\mu} \bar{\nabla} p, \quad (3.1)$$

where \bar{v}^r is the resin interstitial velocity, \mathbf{K} the permeability tensor, ω the porosity of the porous medium and μ the dynamic viscosity of the resin.

3.4.2 Terzaghi's relation

It is assumed that in the resin-saturated zone, Terzaghi's relation is valid, i.e., the total stress is equal to the sum of the fiber bed stress and the resin pressure

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} p, \quad (3.2)$$

where σ_{ij} is the total stress, σ'_{ij} the effective fiber stress, δ_{ij} the unit tensor and p the resin pressure.

3.4.3 Equilibrium equation

The consolidation is considered quasi-static and satisfies the following equilibrium equation:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0, \quad (3.3a)$$

where σ_{ij} is the total stress, ρ the specific mass and f_i the body force. In most cases, the volume force can be neglected in front of the total stress, so Equation (3.3a) becomes simply

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (3.3b)$$

3.4.4 Continuity equation

It is assumed that during the consolidation, both the solid and fluid phases are incompressible. By combining the continuity equations of each phase, the equation of total mass conservation [15-16] is obtained:

$$\text{div}(\omega \bar{v}^r) + \text{div} \bar{v}^s = 0, \quad (3.4)$$

where \bar{v}^r , the relative resin velocity with respect to the fiber grid, is given by (3.1) and \bar{v}^s is the velocity of the fiber grid particle. Let \bar{v}^f be the absolute velocity of a fluid particle, then the following relation holds:

$$\bar{v}^f(x, t) = \bar{v}^r(x, t) + \bar{v}^s(x, t).$$

The second term of (3.4) may be developed as follows:

$$\text{div} \bar{v}^s = -\frac{dV}{dv} \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dV} \right), \quad (3.5)$$

where dv is the elementary volume in the deformed configuration and dV the elementary volume in the initial configuration.

By substituting (3.1) and (3.5) in (3.4), the continuity equation of the resin flow in the deformable reinforcement is obtained:

$$\nabla \cdot \left(-\frac{K}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt}. \quad (3.6)$$

Equation (3.6) is called the “general form” of the mass conservation for the consolidation problem. Gutowski et al. [5-6] has employed this equation to model the consolidation of composite laminates, and Phelan [3] has proposed to model injection-compression with a very similar expression. Refer to [1] for more details about the continuity equation of the consolidation.

3.5 MECHANICAL BEHAVIOR OF THE PREFORM

Gauvin et al. [17] and Robitaille et al. [18-19] have studied the effect of the number of fabric layers, compaction speed, number of cycles and fluid saturation on the compaction of bi-directional fabrics. Results show that fiber reinforcements exhibit a rather complex mechanical behavior. Compaction curves change with the number of layers, the number of cycles and the compaction speed. The presence of fluid in the reinforcement also influences the relaxation curve, but has little effect on the compaction curve. According to Robitaille et al. [18-19], in most cases the compaction curve of a preform may be fitted to the following model:

$$Vf = \bar{A} p^{\bar{B}}, \quad (3.7)$$

where p is the compaction stress and Vf the fiber volume ratio of the reinforcement. The parameter \bar{A} is the fiber volume ratio corresponding to the unitary stress, and \bar{B} is the stiffness index. Experimental results reveal that the compaction effect in the direction normal to the reinforcement plane is much more important than in the plane itself. This observation does not change when the lateral sides of the reinforcement are either free or confined by the mold walls as in oedometric tests. This implies that the deformations and stresses in the plane are negligible relatively to the axial deformations and stresses through the thickness of the preform. In most cases, the reinforcement is only compressed through the thickness, so the consolidation of the preform is generally

considered as a one-dimensional phenomenon and characterized by an experimental stress-deformation curve. However, the flow in the cavity is generally three-dimensional.

Assuming that the resin flow in fiber beds obeys Darcy's law, then the permeability quantifies the conductivity of this porous medium, i.e., the relative facility of impregnation of the preform by the resin. Permeability is a tensorial parameter. In this paper, the permeability tensor was measured following the procedure described in [11-13]. Experimental results show that the preform permeability is a nonlinear function of porosity [12]. Permeability-porosity curves characterize how a preform can be filled for various fiber volume fractions.

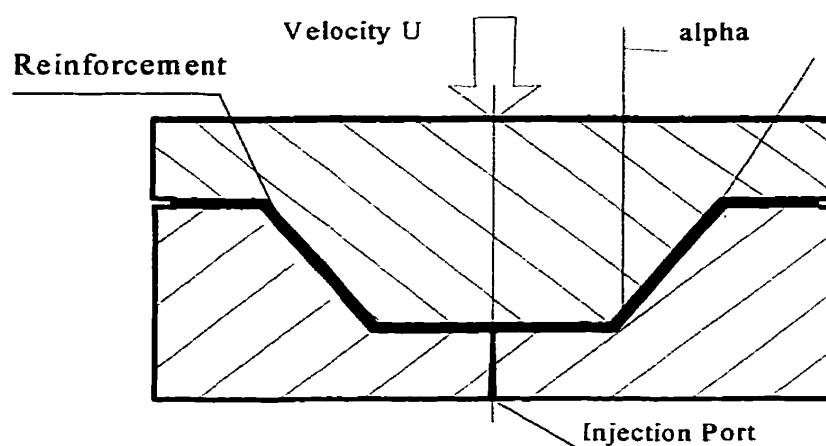


Figure 3.2. Schematics of the CRTM process for a composite shell.

3.6 NUMERICAL MODEL

The numerical model presented in [1] will now be generalized to thin shells. Figure 3.2 illustrates an example of CRTM process for a composite shell. This process involves three stages. First, the preform is set in the cavity of the mold until a given fiber volume

ratio is obtained. Then the resin is injected into the mold. Finally, during the compression phase, the reinforcement is compacted by the moving upper wall of the mold which is controlled by the displacement velocity and the resin is pressed with high pressure into the cavity of the mold. Only the compression phase is analyzed in detail. The injection phase is simpler and can be considered as a particular case of compression with a null compression velocity.

3.6.1 Numerical algorithm

The preform is divided into a large number of elements as shown in Figure 3.3. It is assumed that the fiber bed deformation only happens in the thickness direction of the part and that this deformation is uniform. The thickness of the shell element is considered as an independent parameter in each element, i.e., the deformation takes place only through the thickness. The topology of the mesh remains unchanged during the consolidation. Let U be the compaction speed of the moving upper part of the mold. When the preform is discretized into a large number of elements, we can consider that each element of the preform is compacted independently by the velocity component U_n normal to the surface of the preform as illustrated in Figure 3.4.

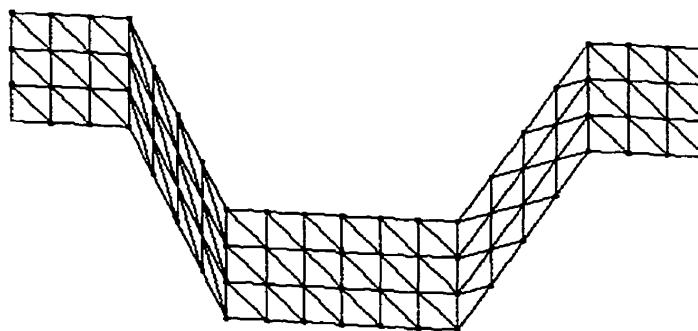


Figure 3.3. Mesh of the part.

Equation (3.6) in this case may be written as

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{U_n}{h(t)}, \quad (3.8)$$

where $h(t)$ is the preform thickness at time t . At any given time, the resin pressure in the saturated domain is completely determined by (3.8) with its boundary conditions. By solving this equation and using (3.1), the resin pressure and velocity are obtained when the fluid is squeezed out of the saturated domain.

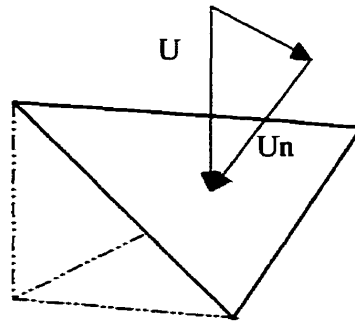


Figure 3.4. Compaction speed U_n of each element.

A numerical algorithm was described for CRTM by Pham et al. [1]. It is a step-by-step procedure which includes both the injection and compression phases. During each iteration, the resin pressure is obtained by solving by the finite element method the consolidation equations presented in paragraph 3.4. A filling algorithm based on the conservation of the resin mass permits advancement of the resin front.

3.6.2 Finite element method

The consolidation of the fiber bed and the resin flow in the cavity will now be analyzed. Equation (3.8) is solved by the finite element method.

3.6.2.1 Variational formulation of the continuity equation

Let \hat{p} denotes the test functions corresponding to pressure and Ω the calculation domain, the weighted-integral formulation of the continuity equation is written as follows:

$$\int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Omega} \hat{p} \left(-\frac{U_n}{h(t)} \right) d\Omega. \quad (3.9)$$

Integrating Equation (3.9) by parts gives the weak form (or variational formulation) of this equation

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) \bar{n} dS + \int_{\Omega} \hat{p} \left(\frac{U_n}{h(t)} \right) d\Omega, \quad (3.10)$$

where \bar{n} is the normal vector of the boundary surface Γ . On the boundary, there are two zones: Γ_1 is the part where a given pressure is imposed, and Γ_0 the part where the condition $\bar{\nabla} \cdot \bar{n} = v_n$ is specified. The test function \hat{p} vanishes on Γ_1 . Then Equation (3.10) takes the following form:

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Gamma_0} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) \bar{n} dS + \int_{\Omega} \hat{p} \left(\frac{U_n}{h(t)} \right) d\Omega. \quad (3.11)$$

The term $-\{\mathbf{K}/\mu\} \bar{\nabla} p \cdot \bar{n}$ in the first integral of the right member represents the natural boundary condition of the problem. Here the pressure is the primary variable and $\bar{\nabla} \cdot \bar{n}$ is the secondary variable.

3.6.2.2 Finite element method

The finite element method divides the full domain into many subdomains called elements. For each element, the weak form (Equation (3.11)) is applied. By choosing $p = N_j p_j$ and $\hat{p} = N_i$, where N_j are interpolation functions on each element and p_j are the pressure values at the degrees of freedom, we get

$$\bar{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x_i} \bar{e}_i = \frac{\partial N_j}{\partial x_i} p_j \bar{e}_i, \quad (3.12)$$

$$\bar{\nabla} \hat{p} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_m} \bar{e}_m = \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \bar{e}_m. \quad (3.13)$$

For the left member of Equation (3.11), by considering that the viscosity μ is constant on each element, we can write

$$\int_{\Omega_e} \bar{\nabla} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega = \int_{\Omega_e} -\frac{1}{\mu} \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \mathbf{K}_{mi} \frac{\partial N_j}{\partial x_l} p_j d\Omega = \int_{\Omega_e} -\frac{1}{\mu} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \{p_n\} d\Omega, \quad (3.14)$$

where $B_{ij} = \partial N_j / \partial x_i$ and $\{p_n\}$ is the vector of nodal pressures. The right member of Equation (3.11) can be written

$$\int_{\Gamma_e} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) \bar{n} dS + \int_{\Omega} \hat{p} \left(\frac{U_n}{h(t)} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i v_n dS + \int_{\Omega} N_i \left(\frac{U_n}{h(t)} \right) d\Omega = Q_i^e. \quad (3.15)$$

The substitution of (3.14) and (3.15) in (3.11) gives the elementary equations on each element. By assembling all the elementary equations, the global system in matrix form is obtained

$$[A] \{p_n\} = \{Q\}. \quad (3.16)$$

The solution of this system gives the approximate pressure values at all degrees of freedom of the mesh.

3.6.2.3 Discretization with 3 nodes triangular shell elements

The calculation domain is discretized with 3 nodes triangular elements. Each element is a thin shell. The planar triangle is transformed from the two-dimensional reference triangle as depicted in Figure 3.5. Both conforming and non conforming elements were used. The pressure is piecewise linear on each element of the mesh. The non conforming

element has three degrees of freedom in the middle of its edges and the conforming has three degrees of freedom at the vertices of the element. The interpolation functions of these elements and their derivatives are shown in Table 3.1.

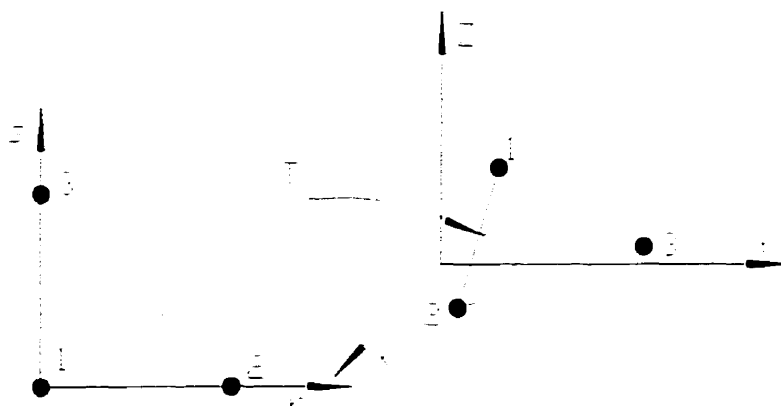


Figure 3.5. Thin shell triangular element.

Table 3.1. Interpolation functions of the non conforming and conforming triangles with 3 nodes.

Element	Nodes	Interpolation Functions $\{N\}$	Derivatives of Interpolation Functions $\{\partial N/\partial r\}$	Derivatives of Interpolation Functions $\{\partial N/\partial s\}$
Non conforming	1	$-1 + 2r + 2s$	2	2
	2	$1 - 2r$	-2	0
	3	$1 - 2s$	0	-2
Conforming	1	$1 - r - s$	-1	-1
	2	r	1	0
	3	s	0	1

3.7 ONE-DIMENSIONAL ANALYSIS

3.7.1 Objectives

Pham et al. [1] have studied the CRTM process in which the injection and compression phases are completely distinct. During the compression phase, the injection gates are closed. This is not the only way to implement the CRTM process. Depending on the choice of the boundary conditions at the injection gate and on the compaction speed, different variants of the process can be obtained. Moreover, the injection and compression may occur simultaneously. In this paragraph, without loss of any generality, the one-dimensional model will be used to study the influence of injection parameters on the CRTM process.

3.7.2 Analysis of the model

We consider again the mold depicted in Figure 3.1. It is a rectangular cavity in which the preform is set up beforehand with a small ratio of thickness over length. The resin is injected from the left side of the mold, and the vent is located on the right side. The resin pressure gradient through the thickness is neglected in front of the longitudinal pressure gradient, so that the resin flow can be considered as one-dimensional along the length of the part. The cavity has initial dimensions of length L_0 , width W , and thickness H . The initial porosity of the preform is ω_0 . Let U be the compaction speed. Then Equation (3.6) can be written as follows:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{U}{h(t)}, \quad (3.17)$$

where K_x is the permeability of the preform in the longitudinal direction, μ the dynamic viscosity of the resin, p the resin pressure and $h(t)$ the preform thickness at a given time

t. Assuming that K_x and μ are not functions of x , by integrating (3.17) the resin pressure distribution is obtained by

$$\frac{K_x}{\mu} \frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{U}{h(t)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} x + C_0, \quad (3.19)$$

$$p = \frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} x^2 + C_0 x + C_1. \quad (3.20)$$

The solution depends on the boundary conditions. Let L be the position of the resin front at a given time t . By substituting the boundary conditions

$$p = 0, \text{ at } x = L, \text{ and } p = p_0(t), \text{ at } x = 0,$$

Equation (3.20) becomes

$$p = \frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} x^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} L + \frac{p_0}{L} \right) x + p_0, \quad (3.21)$$

and if the following conditions are imposed in Equation (3.20)

$$p = 0, \text{ at } x = L, \text{ and } q = q_0(t), \text{ at } x = 0$$

where q_0 is the specified resin flow rate, we get for a cross-sectional area A of the preform

$$p = \frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} x^2 - \frac{q_0 \mu}{A K_x} x + \left(\frac{q_0 \mu}{A K_x} L - \frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} L^2 \right). \quad (3.22)$$

Equations (3.21) and (3.22) represent the pressure distributions in the cavity at any given time for a pressure driven and a flow rate controlled injections respectively. Note that the particular case of Equation (3.22) with a null flow rate $q_0 = 0$ corresponds to a closed injection gate.

3.7.2.1 Resin flow

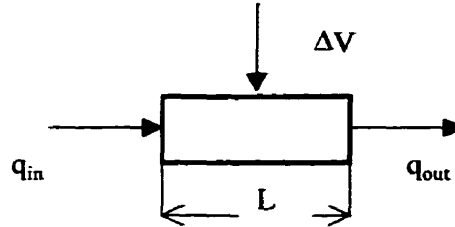


Figure 3.6. Schematics of resin mass conservation.

Let us observe an elementary volume as shown in Figure 3.6. At any given time, the resin mass must be conserved. If we set the positive sign for the flow going out from the domain and the minus sign for the flow entering the domain, then the resin volume q_{out} going out of the saturated zone is equal to the sum of the resin volume entering the cavity q_{in} and the volume change ΔV resulting from compression

$$q_{in} + q_{out} + \Delta V = 0, \quad (3.23)$$

with

$$q_{in} = \bar{v}^r \cdot \bar{n} A \Delta t \text{ at } x = 0,$$

$$q_{out} = \bar{v}^r \cdot \bar{n} A \Delta t \text{ at } x = L,$$

$$\Delta V = U W L \Delta t.$$

where \bar{n} is the surface normal vector, \bar{v}^r the relative resin velocity with respect to the fiber grid and $A = W \times h$. Table 3.2 gives the details of the values taken by the terms of Equation (3.23) in case of pressure driven and flow rate controlled injections.

Table 3.2. Resin flow rates for pressure driven and flow rate controlled injections.

Pressure driven injection	Flow rate controlled injection
$q_{in} = -\frac{1}{2}U L W \Delta t - \frac{K}{\mu} \frac{p_0}{L} A \Delta t$	$q_{in} = -q_0 \Delta t$
$q_{out} = \frac{K}{\mu} \frac{p_0}{L} A \Delta t - \frac{1}{2}U L W \Delta t$	$q_{out} = q_0 \Delta t - U L W \Delta t$
$q_{in} + q_{out} = -U L W \Delta t = -\Delta V$	$q_{in} + q_{out} = -U L W \Delta t = -\Delta V$

3.7.2.2 Admissible compaction speed

It is evident that q_{in} in the case of an injection controlled by the flow rate is always negative or null. Here the negative sign indicates a flow rate entering the cavity and vice versa. As the compaction velocity U is negative, q_{in} in the case of a pressure driven injection may not always be negative. From the expressions of q_{in} in Table 3.2 and as illustrated in Figure 3.7, q_{in} is only negative when the absolute value of the compaction velocity is smaller than

$$U_o = \left| -2 \frac{K_x p_0}{\mu} \frac{h}{L^2} \right|. \quad (3.24)$$

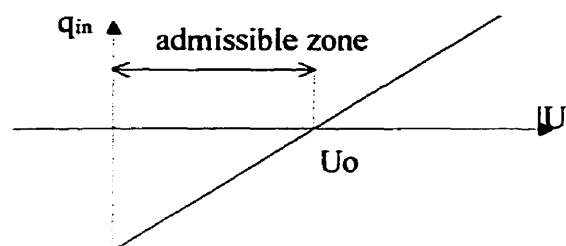


Figure 3.7. Admissible zone of the compaction velocity U .

This may be also explained by the pressure curves depicted in Figure 3.8. Recall that the pressure and the saturated length exist in reality only on the positive sides of the coordinate system. In this figure, an extension in the negative axis is shown to capture the entire shape of the pressure curves. The pressure distribution in the cavity at any given time is represented in Figure 3.8 on the positive x axis by a portion of parabola with negative concavity. When the compaction velocity lies in the admissible zone, the top of the pressure curve remains on the negative side of the x axis as shown in Figure 3.8 (data 1). So the pressure gradient at $x = 0$ and q_{in} must always be negative, i.e., the flow is directed into the mold. On the contrary, when the compaction velocity is larger than U_0 , the top of the pressure curve is now on the positive side of the x axis as shown in Figure 3.8 (data 2). In this case, the pressure gradient at $x = 0$ is positive; this causes an outward flow rate to go out of the preform through the injection gate.

Table 3.3. Admissible maximum values of the compaction speed U_0 .

Permeability K (m^2)	Saturated length L (m)	Compaction speed U_0 (mm/s)
1E-9	0.2	0.625
1E-9	0.5	0.1
1E-10	0.2	0.0625
1E-10	0.5	0.01

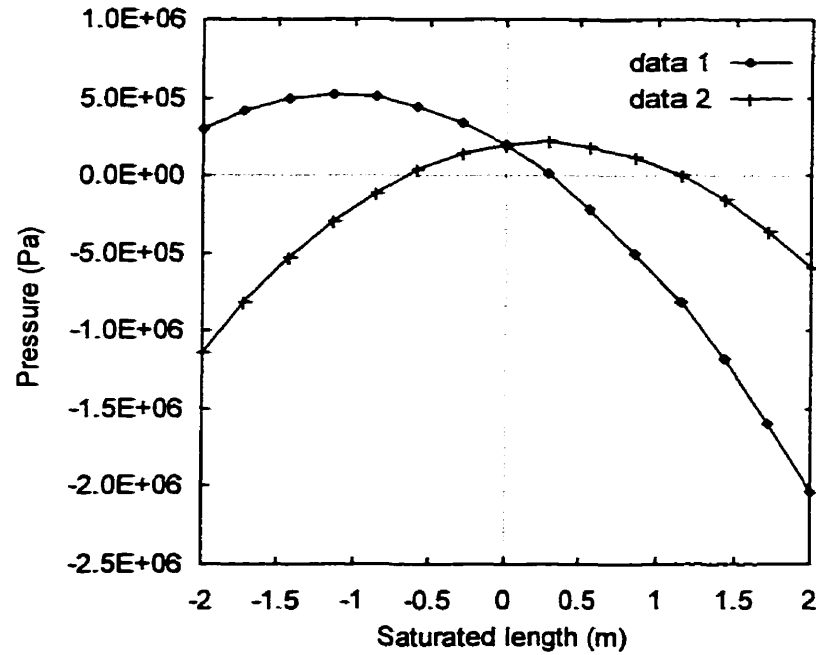


Figure 3.8. Pressure curves with U_o in the admissible zone (data 1) and with U_o out of the admissible zone (data 2).

So this simple unidirectional analytical solution of the consolidation and resin flow equations show that a maximum compaction speed exists, above which the resin will flow out of the cavity during the compression stage. Table 3.3 shows different values of U_o depending on the permeability K and the saturated length L for $\mu = 0.16$ Pa.sec, $p_0 = 0.2$ MPa and $h = 10$ mm.

3.7.2.3 Effect of compaction on the resin pressure

The main purpose of the compaction in CRTM is to facilitate the advancement of the resin into the cavity. Pham et al. [1] showed that by choosing an appropriate compaction speed, we obtain a resin pressure and pressure gradient on the resin front much larger in CRTM than in RTM.

Figure 3.9 shows the pressure distributions for a unidirectional injection-compression in a rectangular cavity. The curve "data 1" represents the resin pressure distribution in the case of injection without compaction, the curve "data 2" when the injection gate is closed during compaction and the curve "data 3" when the injection is performed at constant pressure and compaction occurs simultaneously. It is seen that by choosing an appropriate compaction speed, the pressure gradient on the resin front is larger in CRTM than in RTM (this pressure gradient corresponds to the slope of the pressure curve at the front, i.e., at the right extremity of the horizontal axis in Figures 3.9-3.10 for example). By doubling the compaction speed, we get the curves "data 2b" and "data 3b" respectively. It is clear that the effect of doubling the compaction speed is much larger on the pressure curve "data 2b" than on "data 3b" in terms of the maximum resin pressure and pressure gradient on the resin front. When the compaction speed increases without closing the injection gate, a positive pressure gradient appears at the gate as observed in the curve "data 3b", causing therefore resin to flow out of the cavity. It is evident that when the injection gate is closed as in the case of the curve "data 2b", this problem never appears.

In Figure 3.10, the curve "data 2" represents the resin pressure distribution when the injection gate is closed during compaction and the curve "data 4" when it is opened as a vent. For the same compaction speed, the maximum pressure and the force caused by the resin pressure, are four times smaller, and the pressure gradient on the front is twice smaller in "data 4" than in "data 2" as indicated in Table 3.4. The compaction speed for "data 4b" is four times greater than for "data 2". The maximum resin pressure and resin force are the same as for "data 2", but the pressure gradient on the resin front is twice larger. However, the positive pressure gradient at the injection gate indicates that there is a large amount of resin flowing out of the cavity.

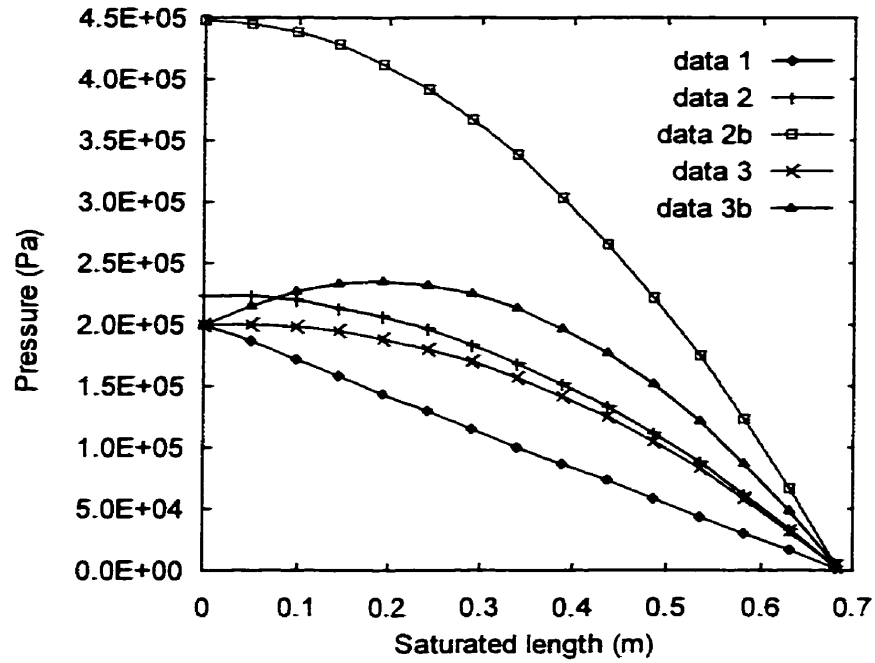


Figure 3.9. Resin pressure distributions in the cavity over the saturated length.

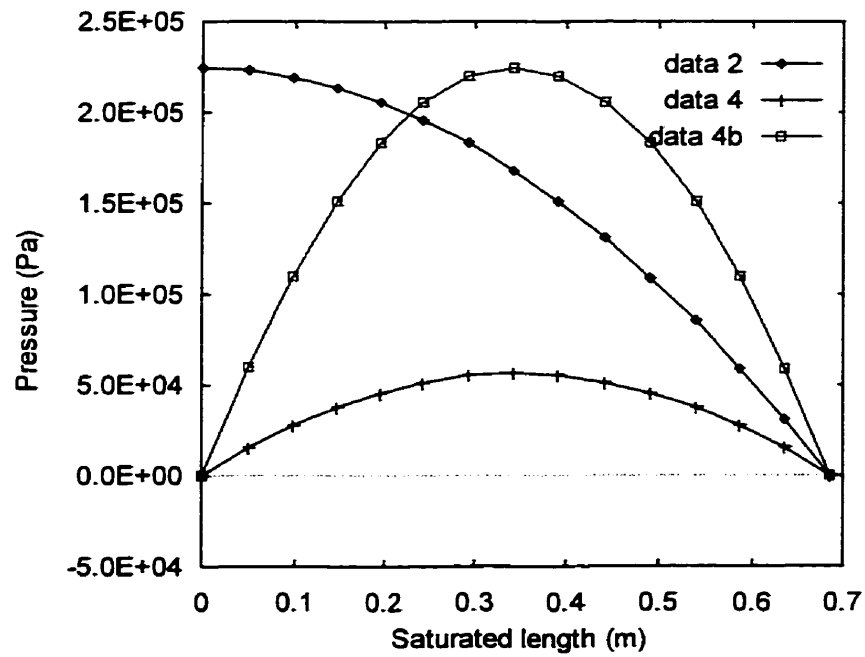


Figure 3.10. Resin pressure distributions in the cavity over the saturated length.

Table 3.4. Maximum resin pressure, resin pressure gradient on the front and total resin force, with $M = \frac{U \mu}{h K_x}$

Injection gate	Maximum pressure	Pressure gradient	Resin force
Opened as a vent	$p_{\max} = \frac{1}{8}ML^2$	$\left. \frac{dp}{dx} \right _{x=L} = \frac{1}{2}ML$	$F = -\frac{1}{12}ML^3$
Closed	$p_{\max} = \frac{1}{2}ML^2$	$\left. \frac{dp}{dx} \right _{x=L} = ML$	$F = -\frac{1}{3}ML^3$

3.7.2.4 Analysis of CRTM process variants

Generally speaking, we may classify the CRTM processes in two different categories. In the first category, the injection and compaction are carried out separately. In the second one, they occur simultaneously. More especially, the filling of the mold may be accomplished by combining some of the stages described in Table 3.5.

The schematics of Figure 3.11 shows four possible process variants in CRTM. In case 1, the injection and compaction are performed separately. It is easy to control the resin quantity necessary to fill the mold and the duration of the process. The resin pressure and the pressure gradient during the injection phase depend only on the pressure or on the flow rate at the injection gate. Their values are limited by the capacity of the injection pump. During the compression phase, the injection gate is completely closed. The compaction speed is always admissible. The resin pressure is high and the pressure gradient on the resin front is medium compared to the other cases. Alternatively, in case 2 during the compression phase, the injection gate is opened as a vent. The compaction speed in this case may be chosen larger than in the first case to obtain a higher pressure gradient on the front with the same values of maximum pressure and resin force. This

strongly facilitates the impregnation of the preform. Note that the compaction speed remains always out of the admissible zone. Hence, a certain quantity of resin will go out of the cavity through the injection gate during the compaction phase. This kind of process is only suitable for a short duration of the compaction stage.

Table 3.5. Different stages in CRTM process.

Process stages	Characteristics
1) Injection without compression	Low resin pressure. Low pressure gradient on the flow front. Easy control of the resin volume injected.
2) Injection-Compression (constant pressure or constant flow rate at the injection gate)	Medium resin pressure, medium pressure gradient on the flow front. Admissible or inadmissible compaction speed. Difficult to control the resin volume injected.
3) Compression (injection gate closed)	High resin pressure, medium pressure gradient on the front. Easy control of the resin volume injected.
4) Compression (injection gate opened as a vent)	High resin pressure, high pressure gradient on the flow front. Inadmissible compaction speed. Not easy to control the resin volume injected.

In cases 3 and 4, the injection and compression phases occur simultaneously as soon as the process begins. The compaction speed must be admissible during a certain time to ensure a complete filling of the mold. The larger is the saturated domain, the smaller is the value of the maximum admissible U_0 . So in order to keep the compaction speed U always inside the admissible zone, either a small and constant compaction speed satisfying this condition could be chosen or different values of U could be selected during the CRTM process. The second approach is quite complex to adjust because U depends on several parameters which change during the process. Compared to the injection phase

in cases 1 and 2, this stage generates a slightly higher pressure gradient on the flow front during mold filling. However, it is difficult to determine the exact quantity of resin to be injected in the cavity. To increase the pressure gradient on the flow front, the compaction speed may be set larger, even larger than U_0 . In this latter case, an outward flow rate will appear at the injection port. During the compaction phase, the injection gate may be either closed (case 3) or opened as a vent (case 4).

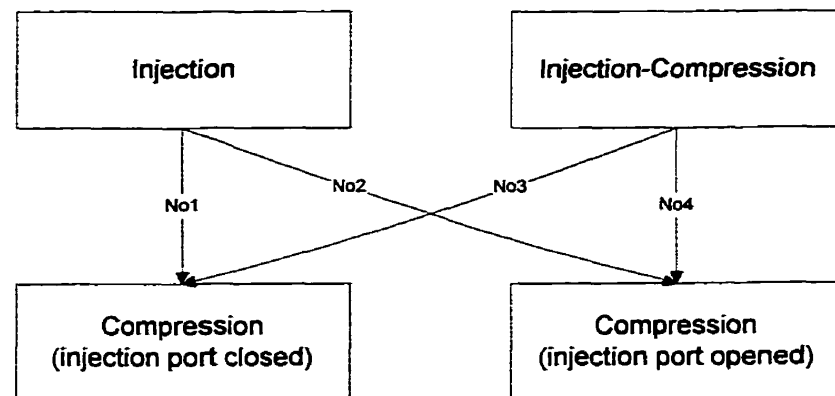


Figure 3.11. Four variants of the CRTM process.

3.8 VALIDATION OF THE MODEL

3.8.1 Test case 1

The objective of this test case is first to validate the consolidation model used in CRTM by comparing the analytical and experimental results, and secondly to evaluate the accuracy of the numerical simulations in terms of filling time and pressure distribution.

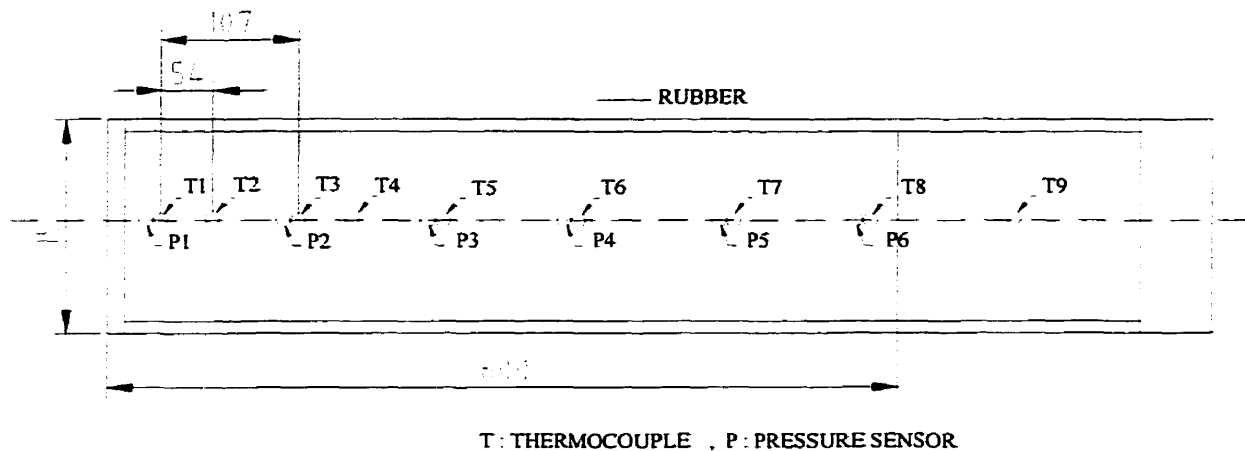


Figure 3.12. Schematics of the frame cavity with sensor locations on the bottom plate (from Wirth et al. [4]).

3.8.1.1 Description of the experiments

Wirth et al. [4] have carried out a series of CRTM experiments in a rectangular cavity as shown in Figure 3.12. Three layers of continuous strand mat OCF-8610 were set up in the mold with an initial thickness of 5.1 mm, a length of 60 cm and an initial fiber volume ratio V_f of 11%. A polyester resin having a viscosity of 0.16 Pa.s, a density of 1.1 and a gel time of 20 minutes at 25°C was injected in the mold. The permeability of the mat OCF8610 was measured and is characterized by the permeability curve of Figure 3.13. The resin was injected at a constant pressure of 0.2 MPa and simultaneously, the preform was compacted by the upper part of the mold moving with a constant speed of 0.09 mm/sec. The injection lasted around 20 seconds. The advancement of the resin in the mold was captured by 11 thermocouples located along the length of the mold. The principle of the measurement is based on the difference between the temperature of the reinforcement and the temperature of the resin. The mold and the reinforcement were heated at 60°C. When the resin comes in contact with the thermocouple, a temperature

change is recorded by the thermocouple. Additionally, the resin pressure was measured by six sensors. These sensors named P1 to P6 were installed at 1.8 cm, 14.8 cm, 25.5 cm, 36.3 cm, 47 cm and 57.8 cm respectively from the left end of the mold.

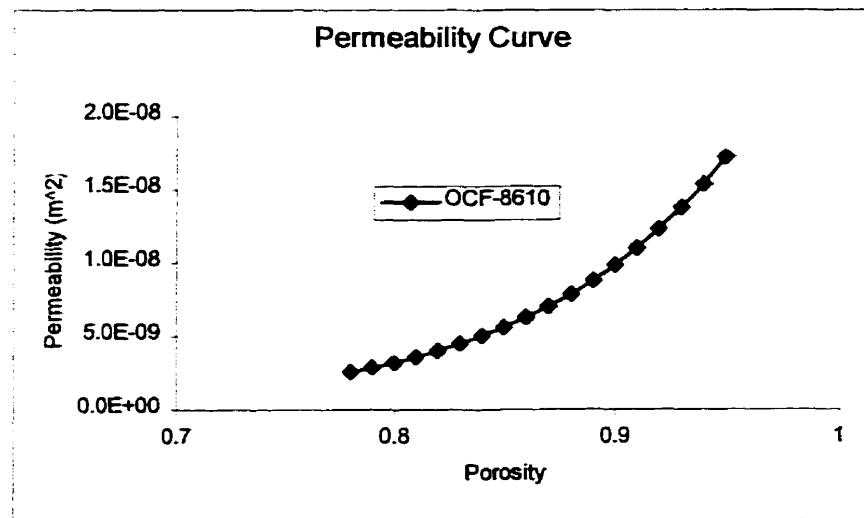


Figure 3.13. Permeability curve of the reinforcement OCF8610.

3.8.1.2 Numerical simulations

A series of numerical CRTM simulations were performed in order to compare numerical results with the experimental ones of Wirth et al. [4]. All the parameters of the numerical simulations are the same as described in the experiments, except the pressure at the injection is a function of time as observed in the experiments. The permeability of the preform was experimentally measured. Both conforming and nonconforming triangular elements were used in the numerical tests with regular and non regular meshes. LCMFLOT, the finite element software developed at the Center for Applied Research on Polymers (CRASP) for Liquid Composite Molding (LCM) analysis, has allowed us to realize these numerical simulations.

3.8.1.3 Results and discussion

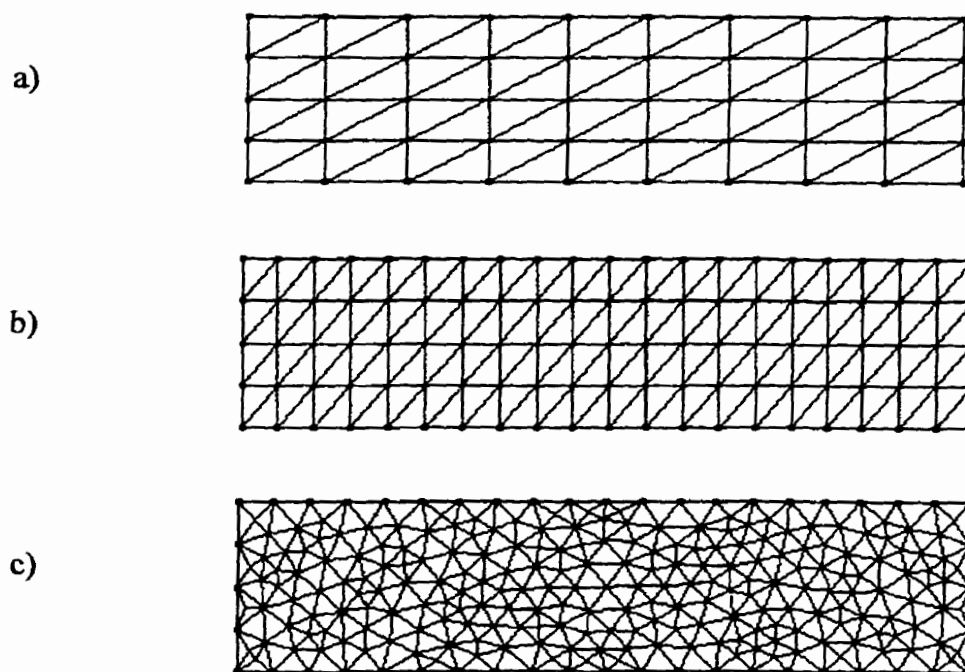


Figure 3.14. Finite element discretization of the cavity:
a) regular mesh 4x9, (b) regular mesh 4x20 and (c) non regular mesh.

The experimental results of this test case are compared with the numerical and analytical ones. Three different meshes shown in Figure 3.14 were used to perform numerical simulations: a regular mesh 4x9, a regular mesh 4x20 and a non regular mesh 4x20. The non regular mesh has the same characteristic length as the corresponding regular one, but the total number of elements is larger.

Figure 3.15 shows the saturated length in function of time for the numerical, analytical and experimental results. Here the saturated length is the resin front captured along the middle line of the mold. A good agreement is observed between these curves with just a slight difference between the analytical and experimental ones. The numerical and analytical solutions have predicted correctly the experimental results in terms of filling

time. The filling algorithm of the numerical simulations was able to capture precisely the progression of the resin front. The finer the mesh, the closest are the numerical results to the analytical solution. Both results obtained with the regular and non regular 4x20 mesh fit well with the analytical solution.

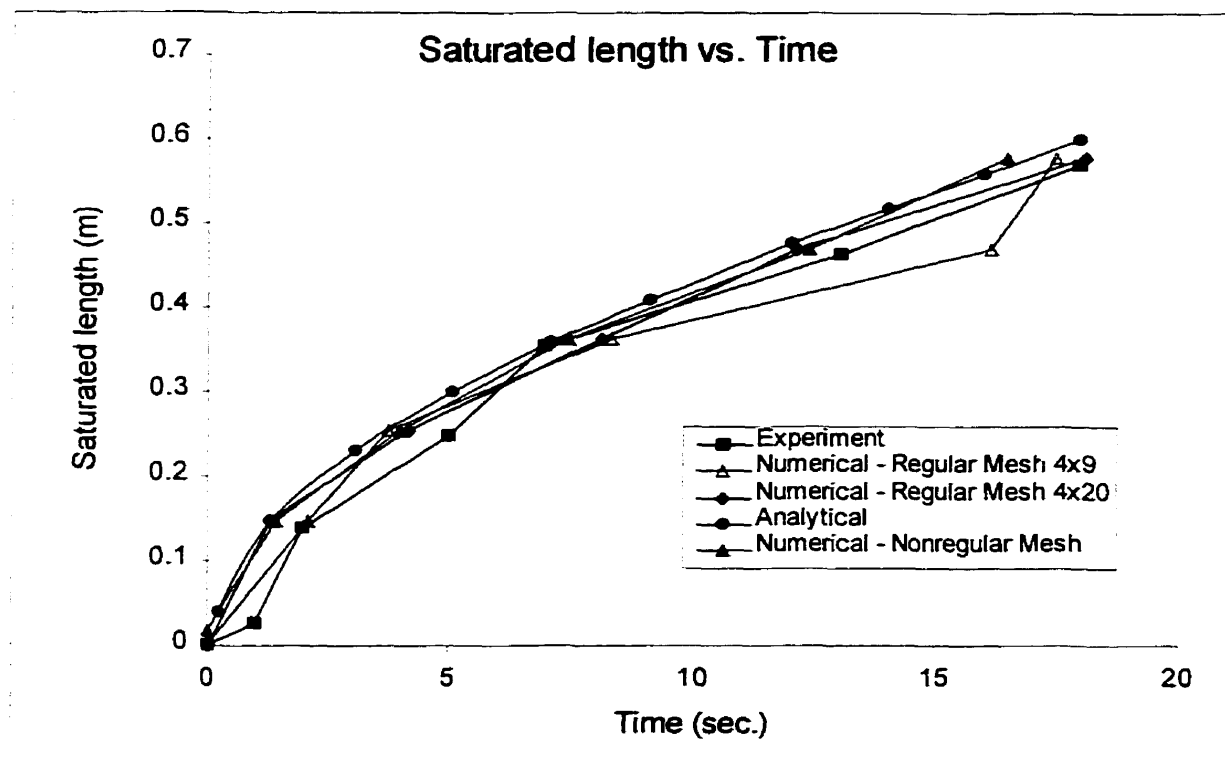


Figure 3.15. Comparison of saturated length over time.

The pressure curves captured at locations P1, P2 and P3 for the experimental and analytical results are presented in Figure 3.16a. The results show a good correlation of the analytical model with the experiment except at locations P2 and P3, where some slight fluctuations are observed in the experimental pressure. On the other hand, in Figure 3.16b the analytical solution and the numerical results performed with the non regular mesh fit very well to each other at all locations P1, P2 and P3. Moreover, the

pressure curves for the numerical simulations carried out with the non regular mesh, regular mesh 4x20 and regular mesh 4x9 sketched together in Figure 3.17 show a negligible difference between the results.

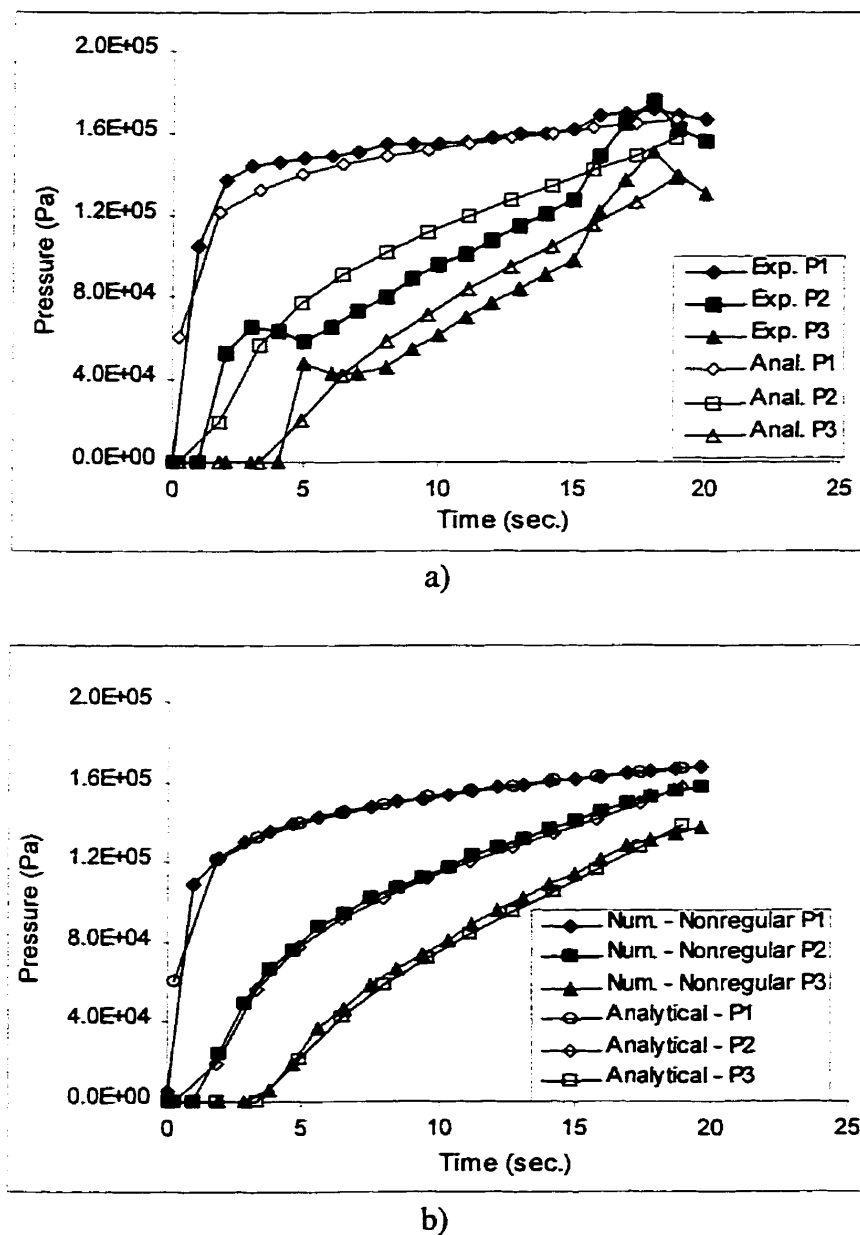


Figure 3.16. Comparison of pressure distribution:
(a) experimental and analytical results and (b) numerical and analytical results.

Finally, this analysis demonstrates that the numerical and analytical solutions based on the consolidation theory correspond well to the experimental works of Wirth et al. [4] and that the numerical simulations using triangular elements allows adequate simulation of the CRTM process.

In this test case, the pressure at the injection gate for both the numerical and analytical solutions was a function of time instead of a constant value as described in the experiments. As a matter of fact, the experimental pressure captured at position P1 very close to the injection gate was not equal to the nominal constant pressure of 0.2 MPa imposed at the injection gate, but rather varied significantly in time. This may be explained by the fact that even when injecting at constant pressure, the pressure of the resin cannot reach instantaneously the prescribed value, but it needs some time. This phenomenon was also observed by Bréard [11]. It is in direct relation with the structure of the reinforcement and the fiber volume ratio. The higher the resistance of the material to the resin flow, the shorter is the time delay. In some cases, when the permeability of the reinforcement is large, the time delay is so long that the cavity is already filled before the pressure reaches the value imposed at the injection gate. This effect was most significant for random strand mats. As a result, the imposition of a constant pressure at the injection gate in the analytical model does not represent correctly the physical phenomena occurring in CRTM process. Hence, it is necessary to determine the behavior of the reinforcement for the injection pressure specified at the injection gate, and instead of a constant pressure, the boundary condition at the injection gate must be a function of time.

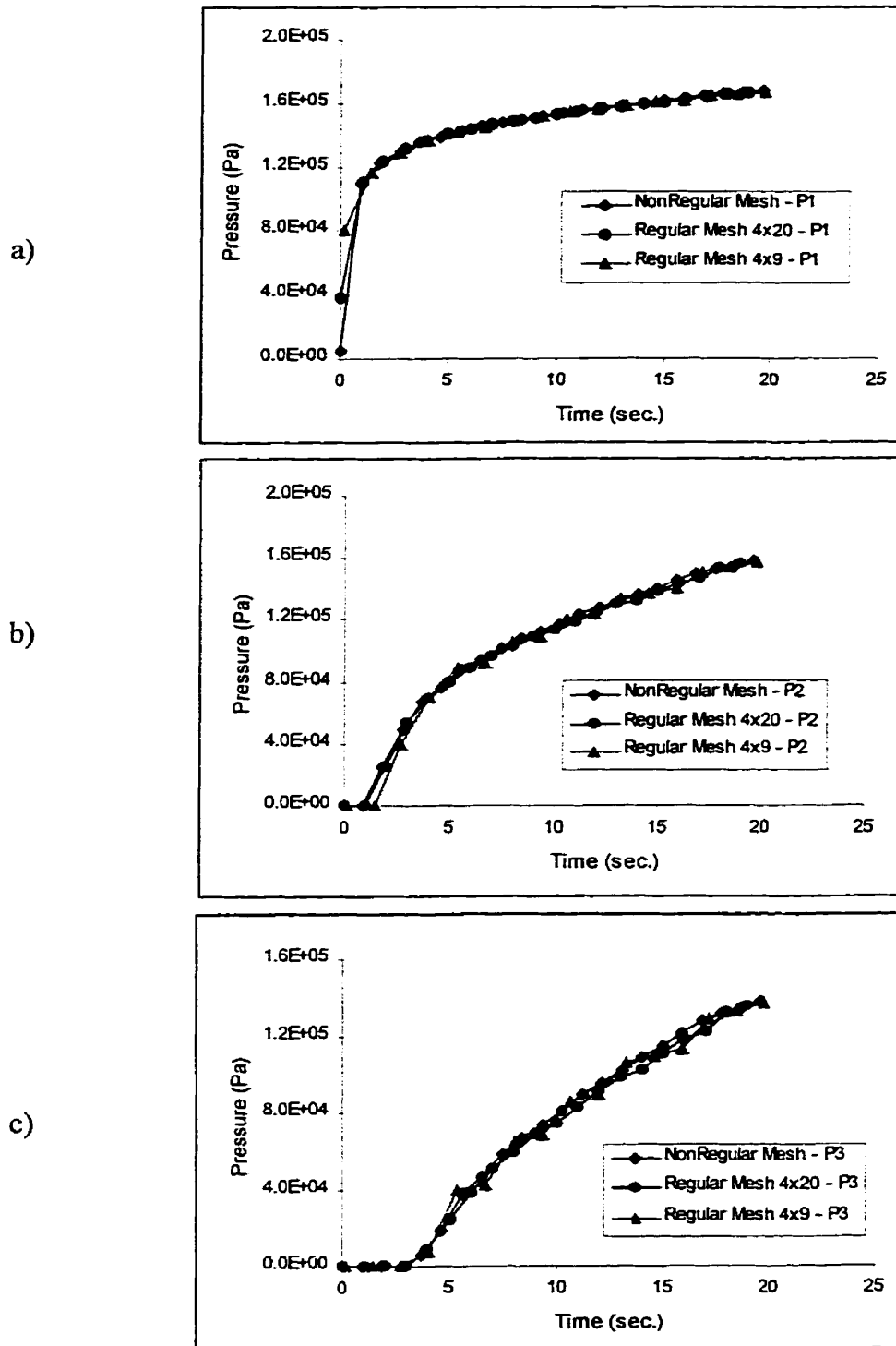


Figure 3.17. Comparison of pressure distribution in numerical simulations performed with regular and non regular meshes: (a) location P1 ; (b) location P2 ; (c) location P3.

3.8.2 Test case 2

The objective of this test case is to estimate the accuracy of CRTM numerical simulations for two-dimensional resin flows by comparing with the analytical solutions. The test part is a quarter of circle as showed in Figure 3.18. On the one hand, the numerical simulations are performed in the 2D Cartesian coordinate system by the finite element method with regular and non regular meshes as indicated in Figure 3.19. On the other hand, because of the symmetry of the problem, it is possible to obtain the exact solution in cylindrical coordinate system as presented in Annexe III. The numerical and analytical results will be compared in terms of filling time and resin pressure in order to validate the numerical procedure.

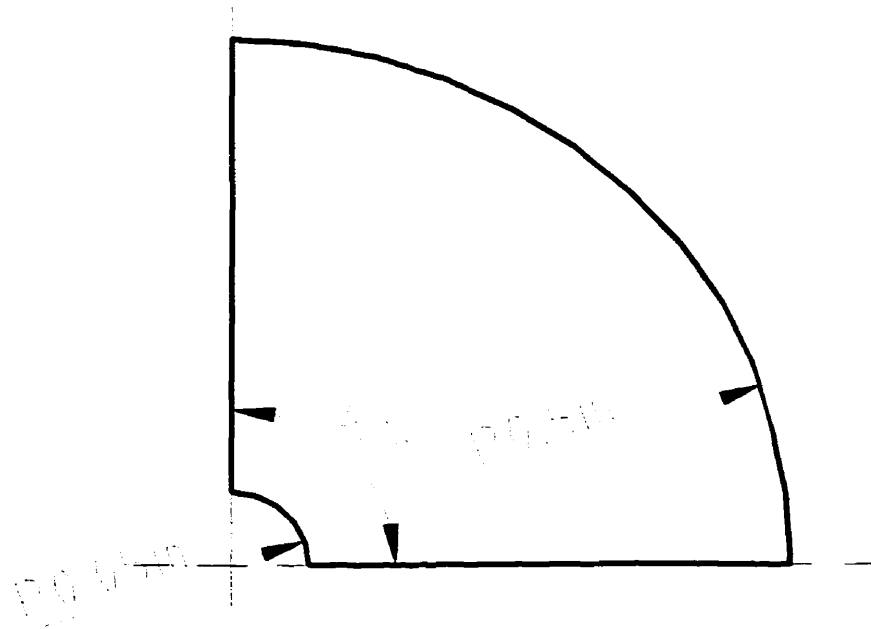


Figure 3.18. Circular geometry of the two-dimensional model problem.

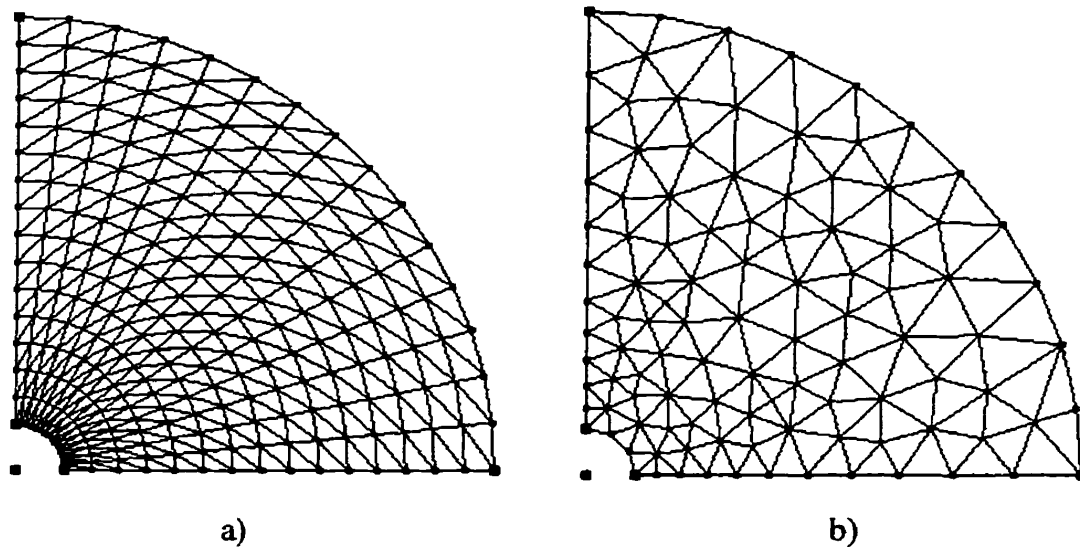


Figure 3.19. Finite element discretization of the quarter of circle:
a) regular mesh, (b) non regular mesh.

3.8.2.1 Numerical simulations

A planar isotropic reinforcement must be used in this case to respect the symmetry of the problem. In this context, the continuous strand mat OCF-8610 of the previous test is suitable. Three layers of continuous strand mat OCF-8610 are set in the mold with an initial thickness of 5.1 mm and an initial fiber volume ratio V_f of 11%. The permeability of the mat OCF8610 is measured and is characterized by the permeability curve of 3.3.13. A resin having a viscosity of 0.16 Pa.s is injected at a constant pressure of 0.2 MPa during the injection phase. After the necessary resin volume is injected, the injection gate is closed and the preform is compacted by the upper part of the mold with a constant speed of 0.5 mm/s until a final thickness of 3.1 mm is reached. The numerical simulations are performed with regular and non regular meshes using both conforming and non conforming 3 nodes triangular elements.

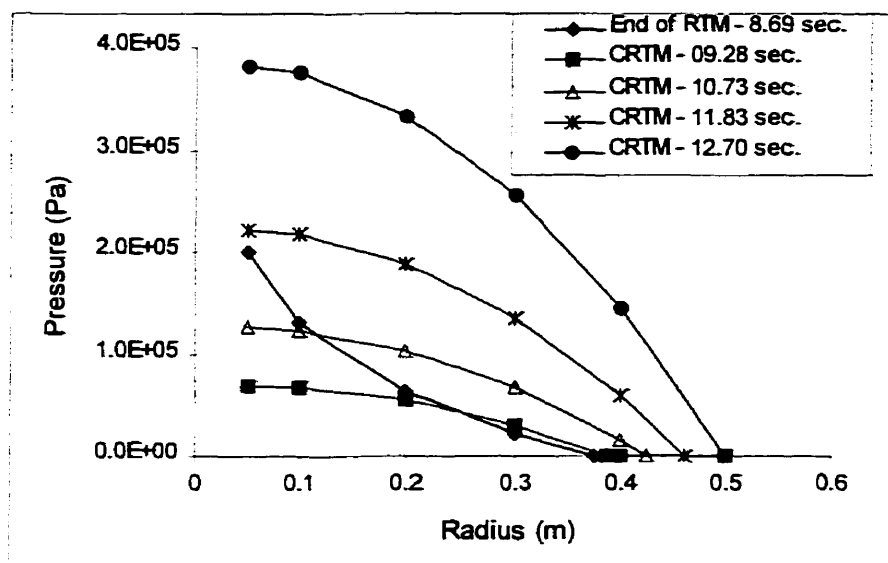


Figure 3.20. Pressure distribution in the quarter of circle during the CRTM process.

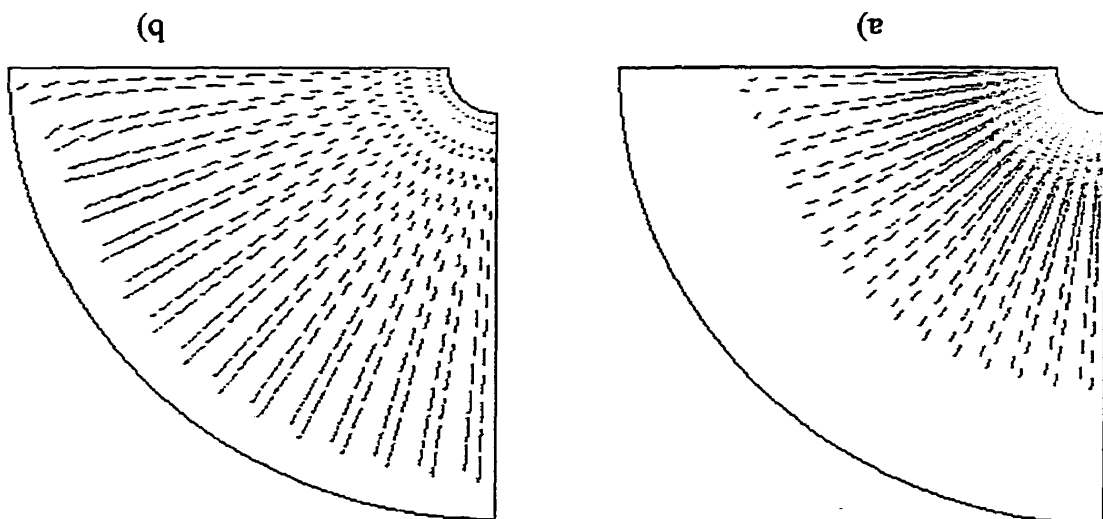
3.8.2.2 Results and discussion

Figure 3.20 illustrates the distribution of the resin pressure during the CRTM process. During the injection phase, the pressure curve has a logarithmic form. The pressure gradient on the resin front is small. During the compression phase, a larger pressure gradient facilitates the progression of the resin. With a compaction speed of 0.5 mm/sec, at the beginning of the compression phase the maximum pressure is not higher than the injection pressure, but the pressure gradient on the front is larger than during the injection phase. The pressure builds up quickly and the resin pressure on the resin front increases remarkably in time. Figure 3.21 shows clearly the effect of compression on the velocity of the flow front. In this figure, the velocity vector is represented by arrows. It is seen that the compression creates a larger velocity on the flow front than during the injection phase. As a result, the filling time of the CRTM process (13 sec.) is much shorter than for RTM without compression (37 sec.).

Figure 3.23 illustrates the comparison of the resin pressure at the end of the compression phase between the analytical and numerical solutions. There is a very good agreement between them for both non conforming and conforming triangular elements with the regular mesh. The pressure curve for the conforming element with the non regular mesh fits the best the analytical solution, but for the non regular mesh with non conforming elements, a pressure difference of 1% is observed.

Figure 3.22 compares the advancement of the resin front between the analytical and numerical solutions. The results show that the regular mesh gives a better prediction of the resin front than the non regular one and that the non conforming triangular element is better than the conforming one. The saturated radius curve obtained for the regular mesh with the non conforming element corresponds well to the analytical solution. A slight difference with the non regular mesh is observed. When the mesh is fine enough, the calculated curve is also very close to the analytical one.

Figure 3.21. Resin velocity on the flow front: (a) injection phase, (b) compression phase.



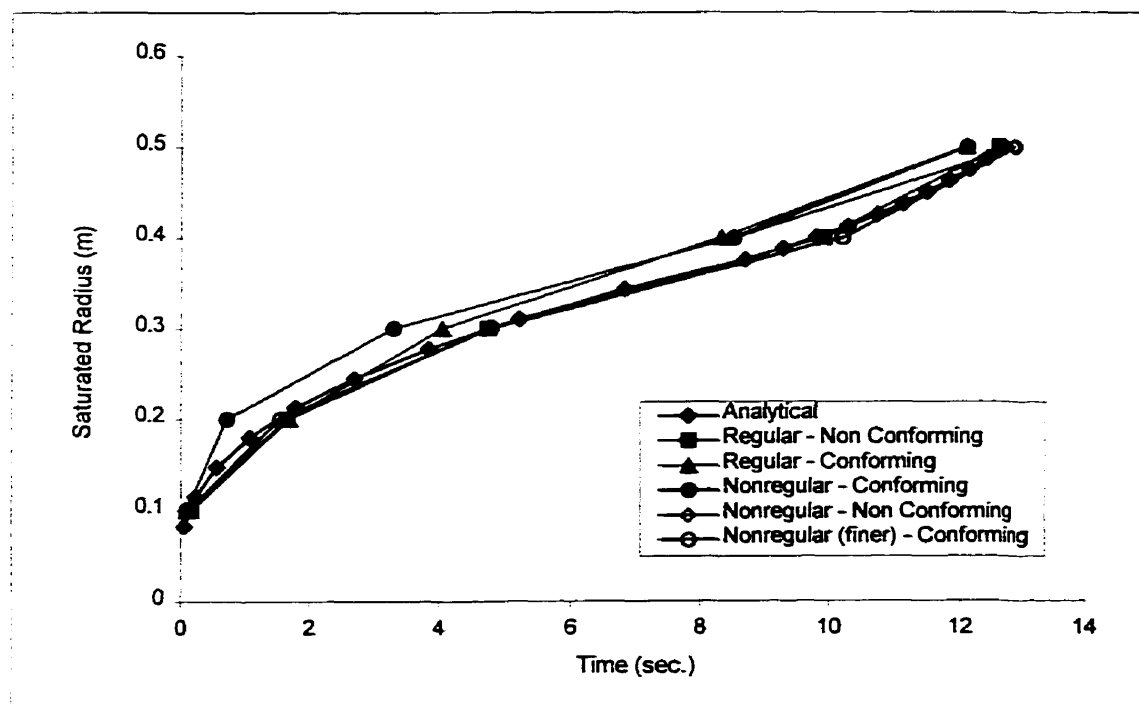


Figure 3.22. Saturated radius in function of time.

In conclusion, the results obtained in this test case demonstrate that the two-dimensional numerical simulations discretized with triangular shell elements can predict correctly the CRTM process and that conforming elements give better results than non conforming elements in terms of resin pressure. However, the non conforming element offers a better agreement in terms of filling time. These results illustrate well the importance of compaction to increase the pressure gradient on the flow front, which facilitates strongly the resin impregnation of the preform.

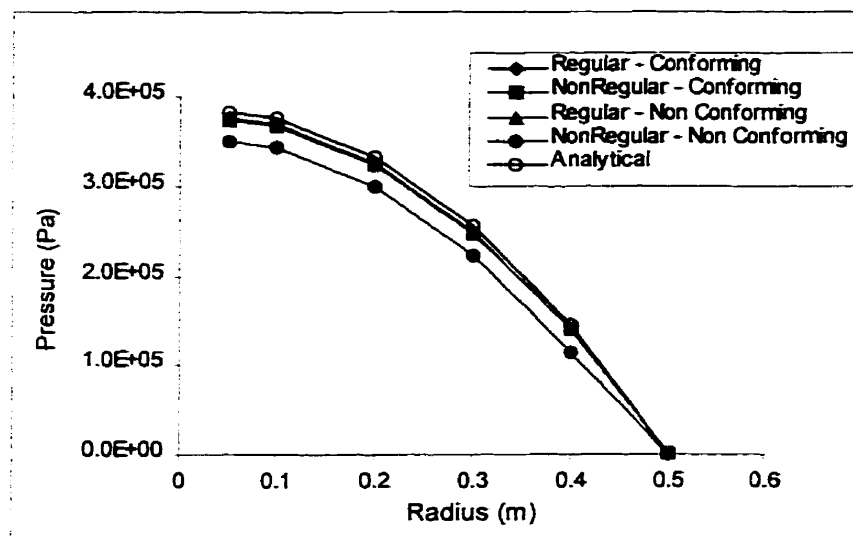


Figure 3.23. Comparison of the resin pressure over saturated radius.

3.8.3 Test case 3

The simulations of the CRTM process for a curve thin composite part are performed here to study the influence of compaction on the filling time, resin pressure and resin pressure gradient on the flow front.

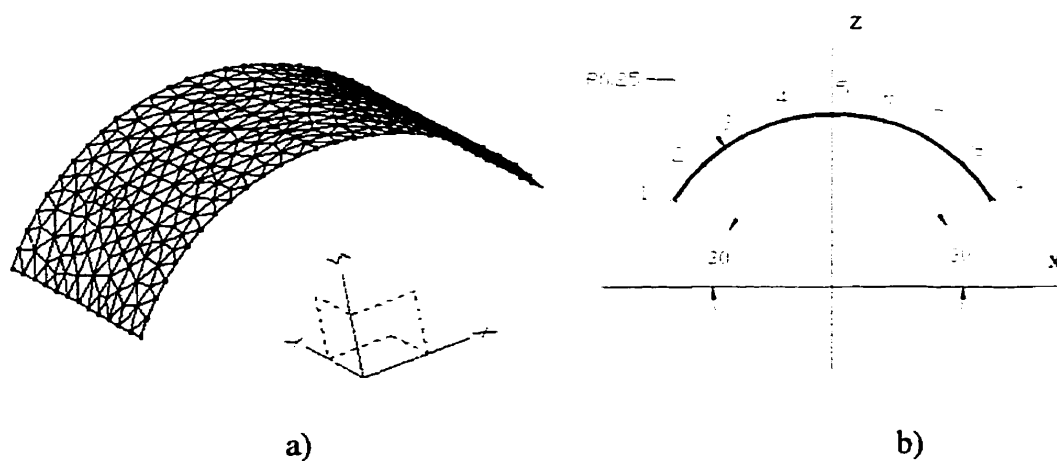


Figure 3.24. Curve thin composite part: (a) mesh, (b) sensor locations.

3.8.3.1 Numerical simulations

The curved geometry mold used in this test is represented by the mesh depicted in Figure 3.24a. This is a portion of a cylindrical surface which has a radius of 0.25 m and a width of 0.25 m. The reinforcement is set up in the cavity of the mold. Two mats are employed in the numerical simulations with initial and final fiber volume ratios given in Table 3.6. Note that because of the geometry of the composite part, during compaction the thickness of the preform is not uniform. So the data given in Table 3.6 represent average values. A resin with a viscosity of 0.16 Pa.s is injected from the left side of the cavity with a constant pressure of 0.2 MPa. The vent is located on the right side of the cavity. Two kinds of CRTM process variants are performed in this example. In the first, the resin is first injected in the cavity, then the injection gate is closed and the preform is compacted. In the second process variant, the resin is injected in the cavity and at the same time the preform is compacted. Then, the injection gate is closed and the preform is compacted until the final design thickness is reached.

Table 3.6. Initial and final volume ratios of the reinforcements.

Reinforcement	Initial fiber volume ratio V_f^0	Final fiber volume ratio V_f^f
Mat OCF8610	0.11	0.18
Mat 400	0.20	0.33

3.8.3.2 Results and discussion

Table 3.7 shows the comparison of filling times between RTM and CRTM simulations. In this table, RTM stands for classical RTM simulations; I/CRTM denotes CRTM simulations for the first process variant and I-C/CRTM for the second process variant. For each material, a series of CRTM simulations of both categories are performed with

different compaction speeds and injection times in order to compare with RTM simulations and to analyze the effect of compaction on the CRTM process.

Table 3.7. Filling times of simulations with an injection pressure $p = 0.2$ MPa.

Simulations	Materials	Upper Part Velocity U (mm/s)	Injection Time (sec.)	Process Time (sec.)	Maximum Resin Pressure (MPa)
RTM 1	Mat OCF8610	0.000	31	31	0.20
I-C/CRTM 2	Mat OCF8610	0.125	14	16	0.20
I-C/CRTM 3	Mat OCF8610	0.500	Impossible	Impossible	#
I/CRTM 4	Mat OCF8610	0.250	8	16	0.35
I/CRTM 5	Mat OCF8610	0.500	8	12	0.70
RTM 6	Mat 400	0.000	131	131	0.20
I-C/CRTM 7	Mat 400	0.05	60	Impossible	#
I-C/CRTM 8	Mat 400	0.025	90	Impossible	#
I/CRTM 9	Mat 400	0.05	30	70	0.48

The results indicate that the filling times are much shorter in CRTM than in RTM. This may be explained easily as the pressure gradient on the flow front is larger in the CRTM process. Figures 3.25a-b show the distribution of the resin velocity on the front. Recall that the resin velocity is proportional to the resin pressure gradient. We see that the pressure gradient on the flow front during the compaction phase (Figure 3.25b) is really larger than during the injection phase (Figure 3.25a). This means that the compaction facilitates strongly the resin impregnation of the preform. The importance of this effect depends on the mechanical behavior of the reinforcement, on the compaction speed and on the way that the preform is compressed.

For the mat OCF8610, it is seen that the simulations I-C/CRTM 2 with the compaction speed of 0.125 mm/sec and I/CRTM 4 with the compaction speed of 0.25 mm/sec give

roughly the same filling time (around 16 sec), but the maximum resin pressure is smaller in the first case (0.2 MPa) than in the second (0.35 MPa). By increasing the compaction speed to 0.5 mm/sec, we get the simulations I-C/CRTM 3 and I/CRTM 5. It is observed that this compaction speed is not admissible in the case of I-C/CRTM 3 because when the compaction is over, there is not enough resin injected to fill the mold. Whereas, the filling time in the simulation I/CRTM 5 decreases to 12 seconds from 16 seconds in the simulation I/CRTM 4. We see that the compaction time in these cases is inversely proportional to the compaction speed and the maximum resin pressure is proportional to the compaction speed.

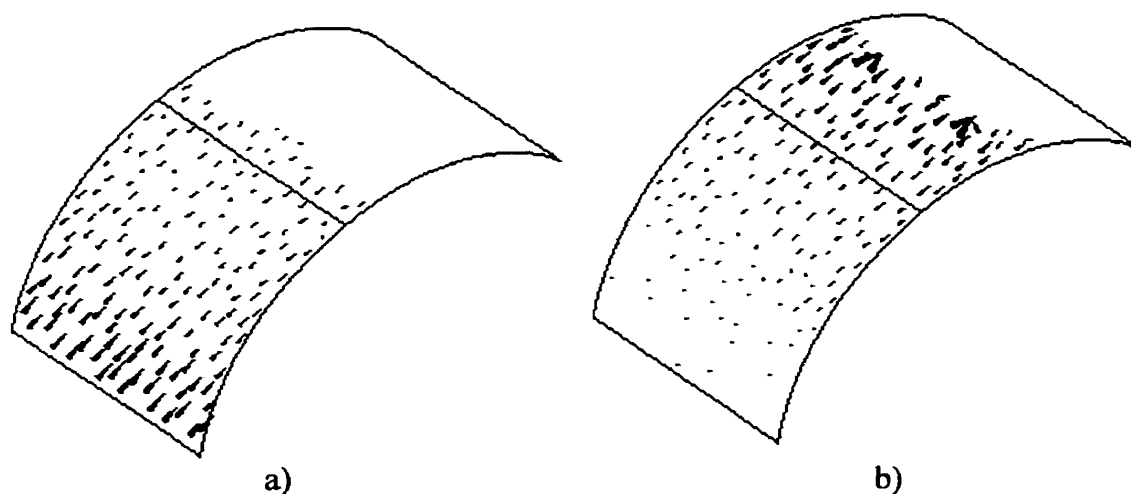


Figure 3.25. The resin velocity: (a) injection phase, (b) compression phase.

For the mat 400 with a compaction speed of 0.05 mm/sec., the simulation I/CRTM 9 gives a filling time of 70 seconds against a filling time of 131 seconds for the simulation RTM 6. The maximum resin pressure reaches a value of 0.48 MPa. On the other hand, the simulation I-C/CRTM 7 is also performed with a compaction speed of 0.05 mm/sec. During the injection-compression phase, an inverse flow going out of the cavity through

the injection gate is observed. Figure 3.26 shows that the maximum resin pressure after 30 sec. is no longer located at the injection gate. An outward pressure gradient exists at the injection gate. The resin flows out of the mold, hence the mold cavity is never filled completely.

Figures 3.27a-b show the resin velocity and the resin pressure distribution after 35 sec. The pressure gradient pushes the resin on the flow front, but at the same time an inverse flow is created through the injection gate. This phenomenon is also observed in the simulation I-C/CRTM 8 after 66 seconds when the compaction speed is 0.025 mm/sec. Figure 3.27c shows the resin flow at this moment. It is seen that the inverse flow happens later and more weakly in I-C/CRTM 8 than in I-C/CRTM 7.

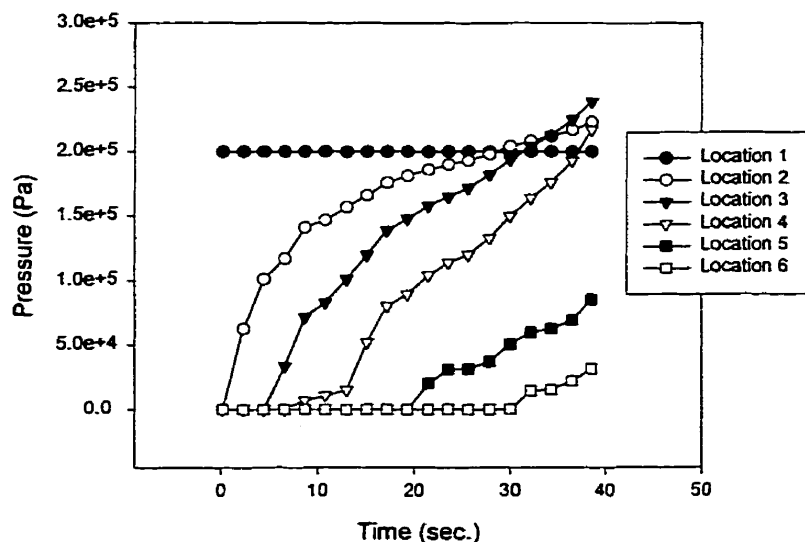


Figure 3.26. Pressure distribution for simulation I-C/CRTM 7.

Depending on the behavior of the reinforcement, i.e., on the porosity and permeability, the compaction parameters should be chosen differently. For the mat OCF8610 with the fiber volume ratio from 11% to 18%, the compaction speed is in the order of from 0.125 mm/sec to 0.5 mm/sec; but for the mat 400 with the fiber volume ratio from 20% to 33%, it varies from 0.0125 mm/sec to 0.05 mm/sec, i.e., it is ten times lower. These limits are due to the value of the resin pressure during the process. The numerical results demonstrate that each kind of CRTM process variant produces a different effect on compaction. In the first category, the filling time is shorter, but the maximum resin pressure is higher. On the contrary, in the second category, the filling time is much improved in comparison with the RTM process, but the maximum resin pressure is not very high. This effect is also observed in the analysis of "effect of compaction on the resin pressure" (Figures 3.9-3.10). Moreover, the CRTM of the first category allows an easier control of the injected resin volume because it is independent from the compaction speed. In the second category, it is not easy to select an appropriate compaction speed. The simulation I-C/CRTM 3 shows an example of incomplete mold filling caused by a wrong choice of compaction velocity. Additionally, the simulations I-C/CRTM 7 and I-C/CRTM 8 illustrate well the phenomenon of inverse flow discussed before (Figures 3.8-3.9), when the compaction speed is not in the admissible zone.

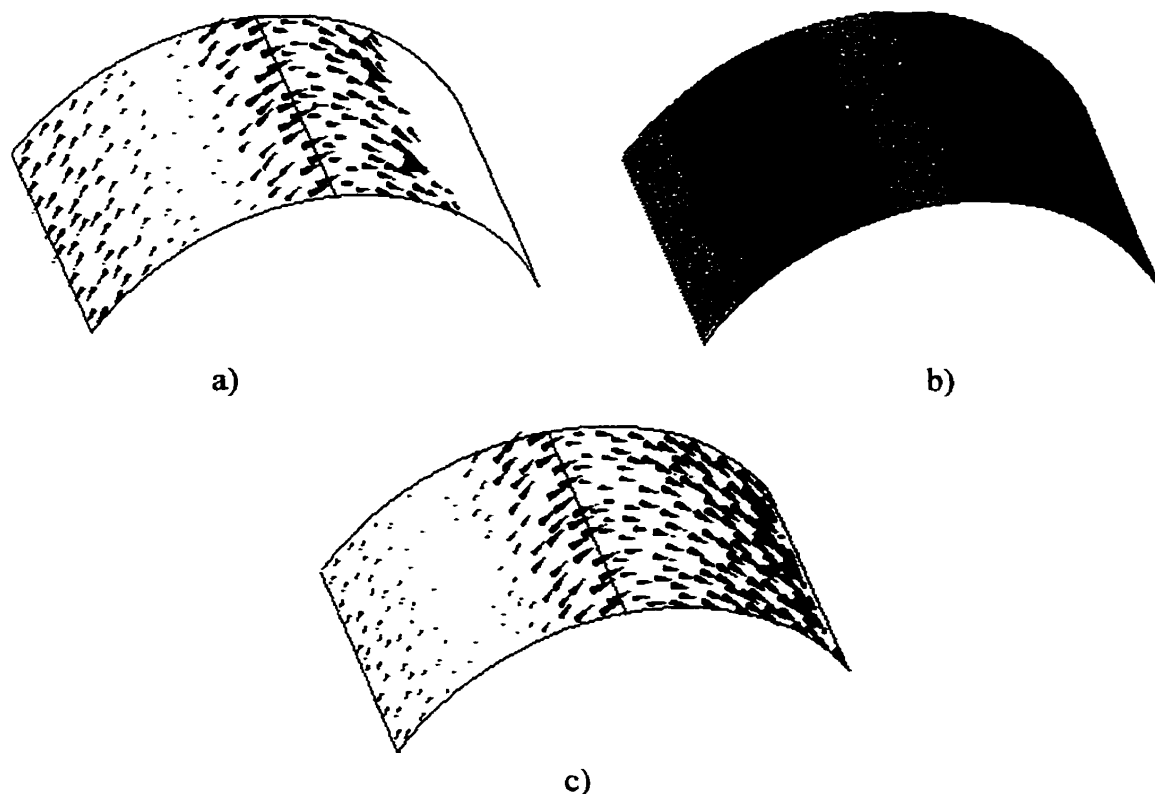


Figure 3.27. (a) Resin velocity, (b) pressure distribution in simulation I-C/CRTM 7; and (c) resin velocity in I-C/CRTM 8.

3.9 CONCLUSION

The software LCMFLOT with the module CRTM, developed for PC, is a numerical flexible tool for liquid composite molding with compression. There are three important parts: (i) a mathematical model, (ii) a numerical algorithm and (iii) a filling algorithm. In this article, a numerical model of consolidation has been developed to simulate the CRTM process in thin shells. The approximation is based on the finite element method. A numerical algorithm is used to simulate the CRTM process in an iterative procedure. In each iteration, a filling algorithm allows advancement of the resin front.

Firstly, this model is validated for a one-dimensional flow of resin in a rectangular cavity. Numerical simulations are compared with an analytical solution and the experimental results of Wirth et al. [4]. Both regular and non regular meshes with triangular shell elements are used in the numerical simulations. A very good agreement in terms of filling time and resin pressure is observed.

Secondly, the algorithm for a two-dimensional resin flow is validated. The resin flow is calculated in the Cartesian coordinate system. The numerical results obtained by this model are compared with the solution in cylindrical coordinate system. Both non regular and regular meshes with conforming and non conforming triangular shell elements are used in the numerical simulations. The numerical results are close to the analytical solution in terms of filling times and resin pressure.

Finally, numerical simulations are carried out for a thin composite shell. Two kinds of CRTM process variants are compared. In the first, the resin is first injected in the cavity, then the injection gate is closed and the preform is compacted. In the second process variant, the resin is injected in the cavity and at the same time the preform is compacted. Then, the injection gate is closed and the preform is compacted until the final design thickness is reached. The results revealed the same effect of compaction as presented in the analytical analysis. In other words, the numerical simulations are able to predict the progression of the resin flow in CRTM for a thin composites shell as well as to study the effect of process parameters such as the compaction speed and resin pressure.

In conclusion, this model allows prediction of the resin flow in the CRTM process. During the process, many kinds of boundary conditions can be chosen such as driven pressure or flow rate controlled injection. They may be constant or a function of time. As above mentioned, they can represent more precisely the physics of the process. Moreover, the compression speed during the compression phase may be also constant or

a function of time. So, users may simulate a CRTM process in different ways to “optimize” the parameters of the process.

In addition, the force due to the resin pressure and the reaction force of the reinforcement due to the compression can be calculated for the mold closing force [20]. This is helpful for users to limit the resin pressure and the compression corresponding to the mold structure.

The model presented in this paper is for simulations of CRTM process with displacement control. Practically, a CRTM process may be performed with pressure control. Simulations of CRTM process with pressure control including multilayer problems is an interesting project for future works.

3.10 ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank gratefully the Ministry of Education of the Quebec Government and the National Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) for financial support. X.-T. Pham is grateful to Joël Bréard and Jean-François Remacle for their useful discussions and comments, and to Stéphane Wirth for his data on CRTM experiments.

3.11 NOMENCLATURE

D_{ij} deformation rate matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)

K permeability tensor of the porous medium

K_i permeability principal components ($i = 1, 2, 3$)

K_{ml} permeability matrix ($m = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$)

- Re Reynolds number
 U velocity of the upper part of the mold
 dV elementary volume in the initial configuration
 dv elementary volume in the deformed configuration
 \bar{e}_l coordinate basis vectors ($l = 1, 2, 3$)
 $h(t)$ preform thickness at time t
 p fluid pressure
 \bar{u} displacement vector of the solid particle
 \bar{v}^f absolute velocity of the fluid particle
 v_n fluid normal velocity
 \bar{v}^r relative interstitial velocity of the fluid particle
 \bar{v}^s velocity of the fiber grid particle
 η fluid kinematic viscosity
 μ fluid dynamic viscosity
 ρ^f fluid specific mass
 ρ^s solid specific mass
 σ_{ij} total stress matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 σ'_{ij} fiber bed stress matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 ω porosity of the porous medium
 ω_0, ω_f initial and final porosity of the porous medium

3.12 REFERENCES

1. X. T. Pham, F. Trochu and R. Gauvin, "Simulation of Compression Resin Transfer Molding with Displacement Control", accepted in *J. Reinf. Plast. Comp.* (1998).
2. N. Ikegawa, H. Hamada and Z. Maekawa, *Polym. Eng. Sci.*, **36**, 953 (1996).

3. F. R. Phelan, proceeding of ICAC97, 417 (1997).
4. S. Wirth. and R. Gauvin, "Experimental analysis of reinforcement compaction for CRTM", submitted to Polym. Compos. (1997).
5. T. G. Gutowski, Z. Cai, S. Bauer, D. Boucher, J. Kingery and S. Wineman, J. Compos. Mater., **21**, 650 (1987).
6. T. G. Gutowski, T. Morigaki and Z. Cai, J. Compos. Mater., **21**, 172 (1987).
7. R. Dave, J. L. Kardos and M. P. Dudukovic, Polym. Compos., **8**, 29 (1987).
8. R. Dave, J. L. Kardos and M. P. Dudukovic, Polym. Compos., **8**, 123 (1987).
9. M. A. Biot, J. Appl. Phys., **12**, 155 (1941).
10. K. Terzaghi, Theoretical Soil Mechanics, John and Sons, New York (1943).
11. J. Bréard, Ph.D. Thesis, Université du Havre, France, pp. 195 (1997).
12. M. L. Diallo, R. Gauvin and F. Trochu, Proceeding of ICCM-11, Gold Coast, Australia, **4**, 441 (1997).
13. P. Ferland, D. Guittard and F. Trochu, Polym. Compos., **17**, 149 (1996).
14. R. Gauvin, F. Trochu, Y. Lemenn and M. L. Diallo, Polym. Compos., **17**, 34 (1996).
15. J. Bear, Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier, Environmental Science Series (1972).

16. O. Coussy, Mécanique des Milieux Poreux, Éditions Technip (1991).
17. R. Gauvin., Y. Lemenn, P. Clerk and F. Trochu, 10th ASM/ESD Advanced Composites Conference, 357, (1994)
18. F. Robitaille and R. Gauvin, "Compaction of Textile Reinforcements for Composite Manufacturing: I. A Review of Experimental Results", accepted in Polym. Compos. (1997).
19. F. Robitaille and R. Gauvin, "Compaction of Textile Reinforcements for Composite Manufacturing: II. Compaction and Relaxation of Dry and H₂O-Saturated Woven Reinforcements", accepted in Polym. Compos. (1997).
20. X.-T. Pham, F. Trochu, J.-F. Remacle and R. Gauvin, "Simulation of Compression Resin Transfer Molding", CADCOMP98 Conference, (August 1998).
21. D. W. Taylor, Fundamentals of Soil Mechanics, John and Sons, New York (1948).

Chapitre 4

Analysis of the Consolidation in Flexible Bladder Process for Thin Composite Parts by Finite Element Method

Xuan-Tan PHAM and François TROCHU

Center for Applied Research on Polymers
Mechanical Engineering Department
École Polytechnique of Montréal
Canada

4.1 PRÉSENTATION DU CHAPITRE

Le phénomène de la consolidation dans le procédé CRTM est présenté dans les deux précédents chapitres où le renfort est comprimé par une paroi rigide mobile. Dans ce chapitre, un autre procédé de mise en forme des composites par compression appelé procédé de vessie est présenté. Dans cette technique, une préforme saturée de la résine est comprimée via une membrane flexible. La consolidation du renfort a lieu sous l'action d'une pression causée par le vide ou dans un autoclave. Un modèle bidimensionnel dérivé des équations générales de la consolidation est utilisé pour modéliser ce procédé. Le comportement du renfort utilisé dans ce procédé est analysé. La méthode des éléments finis est employée pour résoudre les équations de la

consolidation. Le modèle permet de calculer la pression de la résine, la force de réaction et l'évolution de l'épaisseur de la préforme pendant la compression. Les paramètres physiques du problèmes sont analysés en vue d'étudier le comportement du procédé de la vessie.

4.2 ABSTRACT

The consolidation of a saturated preform under pressure by means of a flexible bladder is studied in this paper. This phenomenon occurs in several composite manufacturing processes such as compression resin transfer molding (CRTM) for example. The resin flow in the fiber bed is governed by Darcy's law. The consolidation of the saturated preform is described by the total mass conservation. Mechanical behavior of the fiber network is analyzed. A two-dimensional numerical model is developed bases on the finite element method. The numerical model allows the calculation of the resin pressure distribution in the preform, the reaction force of the preform and the prediction of the evolution of the preform thickness as a function of time and space.

KEYWORDS: Flexible Bladder Process, Consolidation, Composites, Finite Element.

4.3 INTRODUCTION

"Flexible bladder" or *"inflatable bladder"* is a composite part manufacturing process. In this technique, a saturated preform is first set on a mold which is placed in a steel case covered by a flexible bladder, then the preform is compressed by a pressure by means of this bladder as shown in Figure 4.1. The bladder used in this technique must be thin, soft and flexible so that the pressure can be considered as applied uniformly on the preform. Under the effect of this pressure, the preform takes the shape of the mold and reaches a certain thickness. Finally, the composite part is cured and moved out of the device. There are two ways to compress the preform. In the first one, vacuum is created in the steel case. Consequently, the bladder is deformed and forces the preform to take the shape of the mold. The maximum pressure gradient that can be reached with this technique is equal to the atmospheric pressure. In the second approach, the steel case including the preform and the flexible bladder is put in an autoclave, in which the pressure may be set higher than the atmospheric pressure. Later in this paper, we will see that the final thickness of the composite part depends completely on the applied pressure. It is evident that using an autoclave is more efficient, but of course, more expensive.

This technique is simple for forming thin composite parts, even when their shapes are quite complex. The advantage of the flexible bladder process as compared to the compression resin transfer molding (CRTM) [1-2] is that the compression may be achieved uniformly in any direction, but not limited to the direction of the motion of the mobile wall as in CRTM.

The flexible bladder process proceeds in two stages as depicted in Figure 4.1. First, the preform is deformed to take the shape of the mold, and then it is compressed to have the final part thickness. During the compression phase, the fiber reinforcement is deformed and the resin is squeezed out of the saturated preform. This phenomenon is called "consolidation".

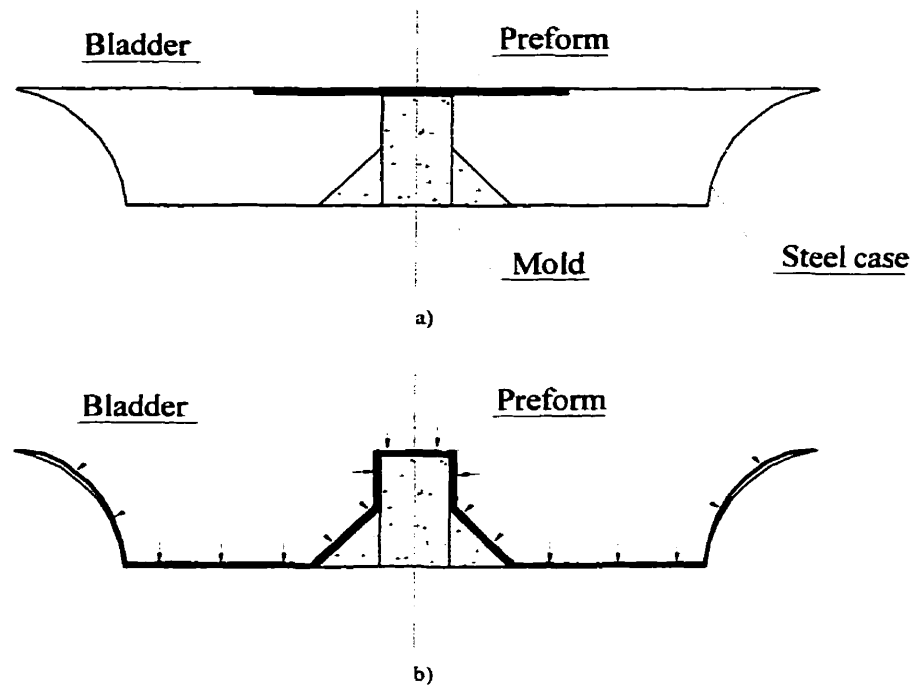


Figure 4.1. Schematics of the flexible bladder process:
(a) initial configuration, (b) deformed configuration.

It is supposed in this paper that the preform used in this technique is thin, flexible and easy to take the shape of the mold. Hence, it is reasonable to consider that the necessary time for the first stage is small compared to the whole processing time and that the thickness of the preform does not change during this stage. As a result, we may study separately the two stages of the flexible bladder process. The objective of this paper is to analyze the consolidation of the preform during the second stage, called the compression phase of the flexible bladder process. This stage is much more important because on the one hand it provides the loading pressure to compress the preform and reach a given thickness, and on the other hand it facilitates the resin impregnation in the preform.

In Pham et al. [1], a review on consolidation in soil mechanics and composite manufacturing was presented. This paper introduced also a general formulation of consolidation in order to model the CRTM problem. The differences between the consolidation models used by Phelan [3], Gutowski [4-5] and Dave [6-7] were discussed, and two derivations from the general formulation corresponding to small and large deformations respectively have been presented. A two-dimensional numerical model derived from the continuity equation has been used for the CRTM process when the displacement of the mold wall is imposed. The consolidation of the preform is one-dimensional along the thickness of the preform and the resin flow is two-dimensional in the plane. A numerical algorithm has been devised to simulate the resin flow in a compressible porous medium by an iterative procedure. The advancement of the resin front was achieved by a filling algorithm based on the resin mass balance. A good agreement was observed between the pressure calculated by the two-dimensional numerical model and an analytical solution.

Based on this approach, Pham et al. [2] have developed a model to simulate the CRTM process with displacement control for thin composite shells. The continuity equation in compressible porous medium was analyzed and solved by the finite element method. Shell elements were used to discretize the domain. The resin flow was analyzed as a two-dimensional phenomenon in the plane of the part. The consolidation of the preform occurs along the thickness of the part. A good agreement was obtained between experimental, analytical and numerical solutions.

In the present paper, a mathematical model is generalized to simulate the consolidation of the flexible bladder process for manufacturing thin composite parts. The continuity equation of the fluid flow in a compressible porous medium is analyzed and solved by the finite element method. Because the part is thin, i.e., the in-plane dimensions are usually much larger than the thickness, it may be modeled as a thin shell. The resin flow is a two-dimensional phenomenon. The consolidation occurs along the thickness of the part. The

consolidation of the preform is studied in some typical examples to analyze the evolutions of the resin pressure and of the preform thickness. In the one-dimensional case, the numerical simulations by the finite element method are compared to the ones obtained from the finite difference method and to simplified analytical solutions.

4.4 CONSOLIDATION THEORY

A review on the theory of the consolidation was presented in Pham et al. [1]. Fundamental consolidation models in soil mechanics can be found in Biot [8], Terzaghi [9] and so on. In composite manufacturing, many studies on the consolidation of the reinforcement were carried out by Phelan [3], Gutowski et al. [4-5], Dave et al. [6-7]. In these studies, the consolidation of the reinforcement in the direction of compaction was studied. Dave et al. [6-7] have used the same equations of consolidation as Biot [8]. On the other hand, Phelan [3] and Gutowski et al. [4-5] have proposed another form of continuity equation to model consolidation. Pham et al. [1] have shown that all these equations are derived from a general formulation of the mass conservation.

The consolidation of a saturated fiber bed is governed by the following equations [1-2]:

- Equilibrium equation:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0, \quad (4.1)$$

where σ_{ij} is the global stress, f_i the body force and ρ the specific mass of the medium.

- Stress relation:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

where σ_{ij} is the global stress, σ'_{ij} the effective stress in the reinforcement, p the resin pressure and δ_{ij} denotes Kronecker notation.

- Elastic constitutive law of the reinforcement:

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.3)$$

where σ'_{ij} is the effective stress, E_{ijkl} the stiffness tensor and ε_{kl} the deformation of the reinforcement.

- Darcy's law (to model the resin flow through the fiber reinforcement):

$$v_i^r = -\frac{K_{ij}}{\omega \mu} p_{,j}, \quad (4.4)$$

where v_i^r is the interstitial velocity of the resin relative to the fiber grid, μ the viscosity of the resin, p the resin pressure, K_{ij} the permeability tensor and ω the porosity of the reinforcement.

- Continuity equation:

$$\text{div}(\omega \bar{v}^r) + \text{div} \bar{v}^s = 0 \quad (4.5)$$

where \bar{v}^r , the relative resin velocity with respect to the fiber grid, is given by Equation (4.4) and \bar{v}^s is the velocity of the fiber grid particle. The second term of Equation (4.5) may be developed as follows:

$$\text{div} \bar{v}^s = -\frac{dV}{dv} \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dV} \right), \quad (4.6)$$

where dv is the elementary volume in the deformed configuration and dV the elementary volume in the initial configuration.

By substituting Equations (4.4) and (4.6) in Equation (4.5) the continuity equation of the resin flow in the deformable reinforcement is obtained:

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} \quad (4.7)$$

where \mathbf{K} is the permeability tensor of the reinforcement, μ the viscosity of the resin and p the resin pressure and dv is the elementary volume in the deformed configuration. Refer to [1] for more details about the equations of the consolidation.

4.5 MECHANICAL BEHAVIOR OF THE REINFORCEMENT

Generally speaking in composite manufacturing and particularly in flexible bladder processes, it is obvious that a higher degree of compaction provides composite parts with an improved performance through criteria such as strength, modulus and strain-to-failure. When the fiber volume ratio of the reinforcement is high, its permeability decreases remarkably. As a result, the resin flow in the preform becomes much more difficult. It is evident that when fiber volume ratio in the final composite part is high, the applied pressure and the preform reaction must be very large. Hence, it is important to study the behavior of the preform, above all the compaction behavior in the thickness direction.

In the literature, many authors have studied the compaction of the reinforcement used in composite manufacturing. Gutowski [4-5], Batch [10], and Gauvin [11] proposed different analytical or empirical models which relate the fiber volume fraction and the compaction stress. The empirical models were obtained from compaction tests achieved in the thickness direction of the reinforcements. Several articles have presented experimental results involving the compaction and the relaxation of reinforcements used in composite manufacturing. Kim et al. [12] realized compaction tests for unidirectional reinforcements with a constant compaction speed. They obtained stress curves which

have the same form as that of Gutowski [4-5]. Results depend on the compaction speed, the number of cycle, lubrication effects, the orientation of the fibers and the stack of reinforcement. They reveal that reinforcement is a visco-elastic material and relaxation curves fit the model proposed by Maxwell-Wiechert [12]. Gauvin et al. [11] and Robitaille et al. [13-14] studied how the number of fabric layers, the compaction speed, the number of cycles and the degree of fluid saturation affect the compaction curves of bidirectional fabrics. The results showed that the fiber reinforcement has a complex behavior. Compaction curves change much with the number of layers, the number of cycles and the compaction speed. The presence of fluid in the reinforcement influences also the relaxation curve, but has little effect on the compaction curve. These experimental results have been compared to some existing analytical models. However, it is difficult to identify the values of the physical parameters involved. On the basis of these observations, it will be assumed here that both the wet and the dry preform respond to deformations as a non linear elastic material.

According to Robitaille et al. [13-14], in most cases, compaction curve of reinforcement may be fitted to the following model:

$$Vf = \bar{A} (\sigma')^{\bar{B}} \quad (4.8)$$

where σ' is the compaction stress and Vf the fiber volume ratio of the reinforcement. The parameter \bar{A} is the fiber volume ratio corresponding to unitary stress and \bar{B} is stiffness index. Note that the fiber volume ratio Vf and the porosity ω have a relation defined by

$$\omega = 1 - Vf \quad (4.9)$$

Under the action of the compaction stress, the deformation ε of the reinforcement can be defined by the following relation:

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0} \quad (4.10)$$

where $\Delta h = h - h_0$ is the displacement of the reinforcement in compaction and h_0 , h are the initial and current thickness of the preform as shown in Figure 4.2.

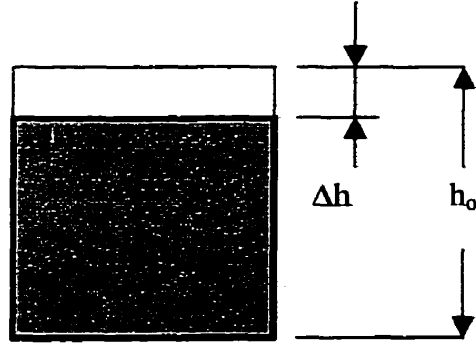


Figure 4.2. Deformation of the reinforcement in compaction.

By convention, the compaction stress is positive, then Equation (4.8) can take the following form:

$$\sigma' = -E(\varepsilon) \varepsilon \quad (4.11)$$

where $E(\varepsilon)$, the stiffness of the reinforcement in compaction, is measured as the slope of the compaction curve and depends on the deformation ε . Figure 4.3 shows an example of compaction curve for the fabric NCS81053 which presents the relation between the stress σ' in the preform and its deformation ε .

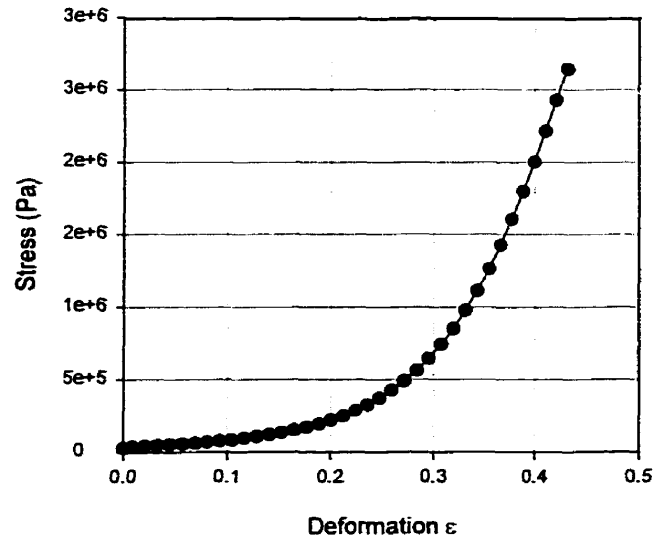


Figure 4.3. Compaction curve for fabric NCS 81053.

4.6 CONSOLIDATION MODEL

Let us observe now the consolidation of a thin saturated preform under an external constraint σ in the plane surface as shown in Figure 4.4. As the thickness of the preform is small, the resin flow is two-dimensional phenomenon in the plane of the part and the consolidation happens along the thickness of the reinforcement.

It is supposed that the time step of numerical calculation is enough small so that we can consider E as a constant in each step. Hence, from (4.11) we get

$$\sigma' = -E \frac{\Delta h}{h_0} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{h_0}{E} \frac{d\sigma'}{dt} \quad (4.12)$$

where E is the stiffness of the reinforcement in the thickness direction.

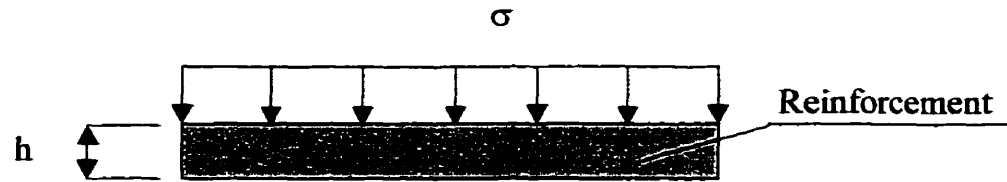


Figure 4.4. Schematics of thin composite consolidation.

If S denotes the cross-sectional area of the preform, the elementary volume dv in the deformed configuration is given by

$$dv = dS h \Rightarrow -\frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (4.13)$$

Hence, the continuity equation (4.7) become

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = \frac{h_0}{h E} \frac{d\sigma'}{dt} \quad (4.14)$$

or

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = \frac{h_0}{h E} \left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{dp}{dt} \right) \quad (4.15)$$

and finally

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) + \frac{h_0}{h E} \frac{dp}{dt} = \frac{h_0}{h E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (4.16)$$

4.7 NUMERICAL MODEL

4.7.1 Process description

Let us refer to Figure 4.1 which describes the flexible bladder process. The saturated preform in the initial state has a thickness h_0 and an initial fiber volume ratio V_f^0 . During the compression phase, the difference of pressure above and below the bladder is created by the vacuum inside the steel case or by the pressure in the autoclave. This pressure gradient deforms the bladder, then the preform, at the same time the resin is squeezed out of the preform. The objective of the process is that the final composite part takes the shape of the mold and reaches a preset thickness.

4.7.2 Numerical algorithm

The consolidation model (4.16) is now generalized to thin shells. The preform is divided into a large number of elements as shown in Figure 4.5. It is assumed that the fiber bed deformation only occurs in the thickness direction as a result of compression. The thickness of the shell element is considered as an independent parameter in each element, i.e., the deformation takes place only through the thickness. The topology of the mesh remains unchanged during the consolidation. When the preform is discretized into a large number of elements, we can consider that each element of the preform is compressed independently by the pressure.

The numerical algorithm used for the consolidation is a step-by-step procedure. During each iteration, the resin pressure is obtained by solving by the finite element method the consolidation equations presented in paragraph 4.2. The solution of the resin pressure at each calculation step is considered as the initial condition for the next step. The effective stress is calculated from the stress relation and then the thickness is determined from the

compaction curve. In each step, the porosity and the permeability are updated in the calculation.

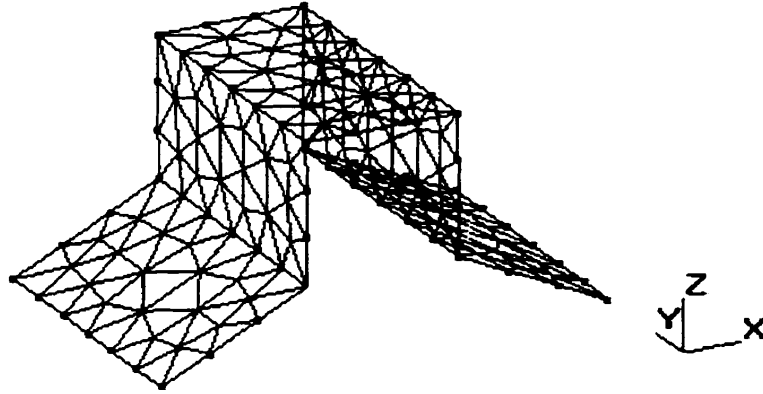


Figure 4.5. Thin shell composite part.

4.7.3 Finite element method

4.7.3.1 Variational formulation

Let \hat{p} denote the test function corresponding to pressure and Ω the calculation domain, find $p \in H_0^1(\Omega)$ such that:

$$\int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega + \int_{\Omega} \hat{p} \frac{h_0}{h E} \frac{dp}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{p} \frac{h_0}{h E} \frac{d\sigma}{dt} d\Omega, \quad \forall \hat{p} \in H_0^1(\Omega) \quad (4.17)$$

By integrating by parts (4.17), a weak form of the system is obtained:

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} \hat{p} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) d\Omega + \int_{\Omega} \hat{p} \frac{h_0}{h E} \frac{dp}{dt} d\Omega = - \int_{\Gamma} \hat{p} \bar{\mathbf{v}}^r \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{\Omega} \hat{p} \frac{h_0}{h E} \frac{d\sigma}{dt} d\Omega, \quad (4.18)$$

where \vec{n} is the normal vector of the boundary surface Γ . On the boundary, there are two zones: Γ_1 is the part where a given pressure is imposed, and Γ_0 the part where the condition $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_n$ is specified.

4.7.3.2 Finite element formulation

4.7.3.2.1 Space discretization

The finite element method divides the full domain into many subdomains called elements. For each element, the weak form (4.18) is applied. By choosing $p = N_j p_j$ and $\hat{p} = N_i$, where N_j are interpolation functions on each element and p_j are the pressure values at the degrees of freedom, we get

$$\bar{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x_l} \bar{e}_l = \frac{\partial N_j}{\partial x_l} p_j \bar{e}_l, \quad (4.19)$$

$$\bar{\nabla} \hat{p} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_m} \bar{e}_m = \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \bar{e}_m. \quad (4.20)$$

If P stands for nodal pressures, by discretizing all the domain, we get the global system of equation

$$R P + C \dot{P} = F \quad (4.21)$$

where F is the global right member and C , K are the submatrices of the global consolidation matrix.

4.7.3.2.2 Time discretization

The weighted residual approach for time discretization [15-16] is used. It is assumed that

$$P = P(\tau) = P_k + \frac{\tau}{\Delta t} (P_{k+1} - P_k) \quad (4.22)$$

with

$$\tau = t - t_k \quad (4.23)$$

By introducing Θ as weighting parameter with W being the weighting factor

$$\Theta = \frac{1}{\Delta t} \frac{\int_0^{\Delta t} W \tau d\tau}{\int_0^{\Delta t} W d\tau} \quad (4.24)$$

we get

$$R [P_k + \Theta (P_{k+1} - P_k)] + \frac{C (P_{k+1} - P_k)}{\Delta t} = \bar{F} \quad (4.25)$$

where

$$\bar{F} = F_k + \Theta (F_{k+1} - F_k) \quad (4.26)$$

4.8 ONE-DIMENSIONAL PROBLEM

4.8.1 Analysis

The objective of this analysis is to estimate the accuracy of numerical simulations by comparing the results obtained by the finite element method with another solutions. Figure 4.6 shows the schematics of the one-dimensional problem in case of an external pressure load. The consolidation equation (4.16) can be written as follows:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{h_0}{h E} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{h_0}{h E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (4.27)$$

where K_x is the permeability in the direction x , E the stiffness modulus, h and h_0 the current and initial thickness of the reinforcement, μ the resin viscosity, p the resin pressure and σ the external pressure loading on the preform.

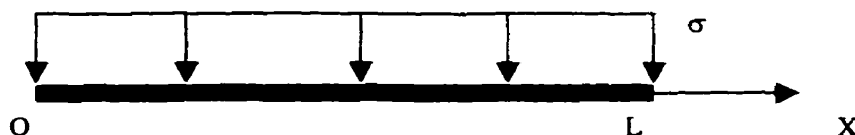


Figure 4.6. One-dimensional consolidation.

At the beginning, the permeability K of the reinforcement is uniform along the length of the preform. But during the consolidation, the preform is deformed and the permeability is not uniform any more. In fact, from the resin pressure we determine the effective stress, then the deformation, the thickness, the porosity and finally the permeability of the preform. So generally we may consider that the permeability is a function of the resin pressure and position. Practically, it is impossible to show explicitly the relationship describing how permeability depends on position. Hence, it is almost impossible to obtain an analytical solution in this case.

4.8.2 Simplified analytical solution

To make sure that the implementation of the numerical methods is correct, a series of tests are performed in which the permeability is assumed constant and there is no deformation of the preform. Mathematically, it can be considered as an analogy with the thermal problem. In this case, Equation (4.27) is simplified and becomes

$$-\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{h_0}{h E} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{h_0}{h E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (4.28)$$

An analytical solution of Equation (4.28) can be obtained. If we note

$$K_0 = \frac{h E K_x}{h_0 \mu} \text{ and } A_0 = \frac{d\sigma}{dt}$$

then (4.28) becomes

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{K_0} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{A_0}{K_0}, \quad (4.29)$$

where $p(x,t)$ is a function of x and t . Equation (4.29) is solved with the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} p(0,t) &= 0, \\ p(L,t) &= 0, \\ p(x,0) &= f(x). \end{aligned} \quad (4.30)$$

where L is the length of the preform and $f(x)$ is a function describing the initial conditions of the problem. The solution of Equation (4.30) when the parameter A_0 is a constant is as follows:

$$p(x,t) = -\frac{4A_0 L^2}{K_0 \pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} K_0 t} + \frac{A_0}{2K_0} (Lx - x^2). \quad (4.31)$$

Equation (4.31) describes the pressure $p(x,t)$ during the loading time \bar{t}_1 , i.e., the parameter A_0 is not zero. After this loading phase, the pressure during the holding time can be calculated by

$$p(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4A_0 L^2}{(n\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{K_0} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} K_0 \bar{t}_1} + \frac{1}{K_0} \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} K_0 (t - \bar{t}_1)} \quad (4.32)$$

4.8.3 Finite difference method

In general, the finite element method is more powerful and stable than the finite difference method, particularly when the geometry of the problem is complex. The finite difference method is often limited by instability problems, mainly for time dependent problem. However, the finite difference method is used here to solve this equation in order to compare with the results obtained by the finite element method.

Let L denote the length of the preform as shown in Figure 4.6 in which N nodes are considered for the finite difference calculation. It is supposed that during a time short enough, it may consider that the permeability K remains constant at each node, hence Equation (4.28) can be used to calculate the resin pressure.

4.8.4 Finite element simulations

The finite element simulations are performed in a square of 1m by 1m, whose regular mesh is shown in Figure 4.7. A preform of twelve layers of the fabric NCS 81053 is used in this case with an initial thickness of 6.6 mm and an initial fiber volume ratio V_f^0 of 42%. The permeability and compaction behavior of the reinforcement are measured experimentally and characterized respectively by the permeability curve of Figure 4.8 and the compaction curve of Figure 4.3. The preform is saturated with a resin of viscosity 0.16 Pa.s. The numerical simulations are performed with regular meshes using conforming 3 nodes triangular elements. The process is performed in autoclave. The preform is compressed on the surface of the square. The pressure increases linearly from zero up to 8.10^5 Pa during 10 seconds. Then, this pressure is held until the end of the process. When two parallel sides of the square are closed, by symmetry the problem is one-dimensional.

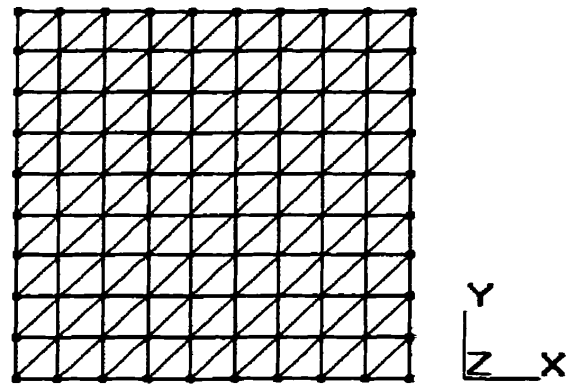


Figure 4.7. Regular triangular mesh of the square.

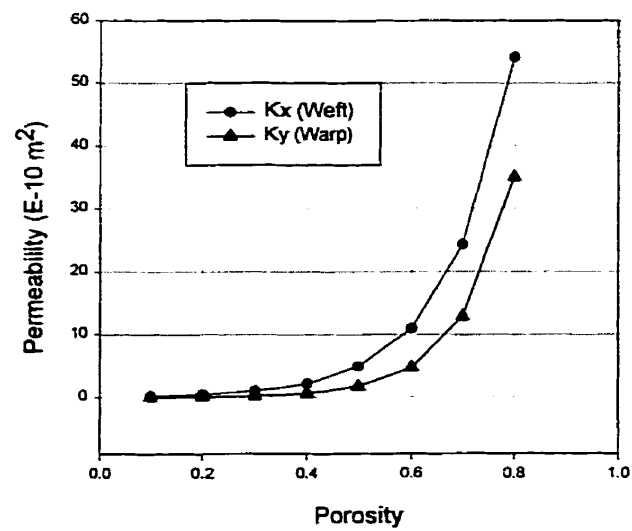


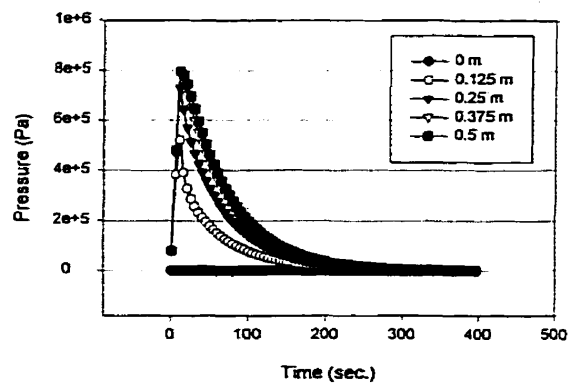
Figure 4.8. Permeability curve for fabric NCS 81053 (K_x and K_y).

4.8.5 Results and discussion

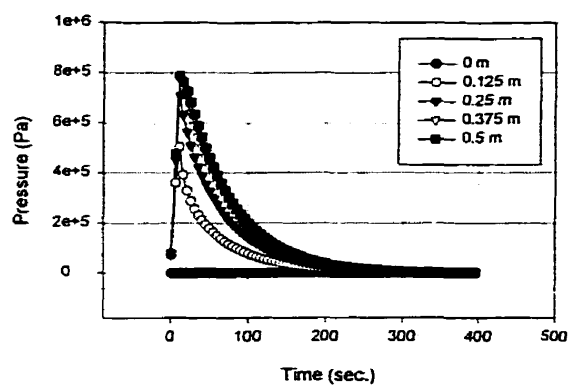
Figures 4.9 (a, b and c) present the resin pressure distributions for the series of tests obtained from the analytical solution, the finite difference method and the finite element method, respectively. In these tests, all the parameters in the calculations are chosen when the preform is in its initial state. There is a good agreement between them. The difference of the pressures at positions 0.5 m, 0.375 m and 0.25 m are negligible during the process. The maximum difference happens at position 0.125 m with a value of 3%. These tests show that the finite element solution of Equation (4.28) is correct. Note that these simulations do not take the nonlinearity of the problem into account yet.

Another series of simulations are performed with the finite difference and finite element methods. The numerical algorithm of resolution is a step-by-step procedure. As above mentioned, the resin pressure solution at each step is considered as the initial condition for the next step. The effective stress in the preform is calculated from the stress relation and then the thickness is determined from the compaction curve. In each step, the porosity and the permeability are updated in the calculations. It is known that the permeability curve in function of porosity and the compaction curve in function of deformation are nonlinear. Unfortunately, the finite difference method in these simulations do not give stable results. As many parameters change during the process, the finite difference calculation is unstable. On the contrary, the simulations performed with the finite element method are much more stable. A convergence of the results is always obtained when the mesh is refined or the time step is smaller.

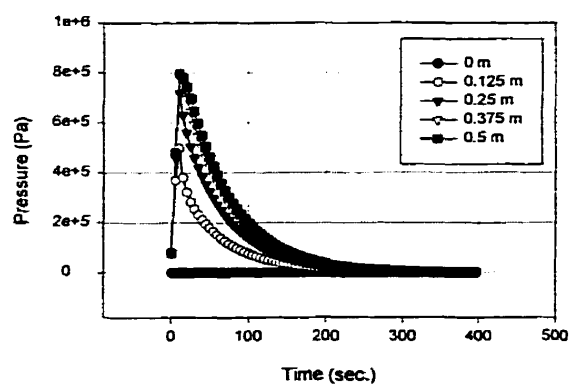
In the sequence, the flexible bladder process is analyzed by the finite element method for different mold geometries, pressure loading curves and boundary conditions.



a) Analytical solution



b) Finite difference approximation



c) Finite element approximation

Figure 4.9. Comparison of results for the one-dimensional simplified case.

4.9 SQUARE TEST CASE

4.9.1 Objective

These tests are carried out in order to analyze the evolution of the resin pressure and of the part thickness during the process. The geometry of the preform is a square. Varied parameters are used for simulations such as the boundary conditions, the pressure loading curves and the overall dimensions of the preform. The important parameters that we need to observe are the final thickness of the part and the time necessary to obtain a uniform thickness.

4.9.2 Numerical simulations

Numerical simulations are performed in squares whose dimensions are shown in Table 4.1. A "square" of length of 1 m and a "small square" of length of 0.1 m will be used. A preform of twelve layers of the fabric NCS 81053 is employed. The initial thickness h_0 and initial fiber volume ratio V_f^0 of this material are indicated in Table 4.2.

Table 4.1. Dimensions of the square.

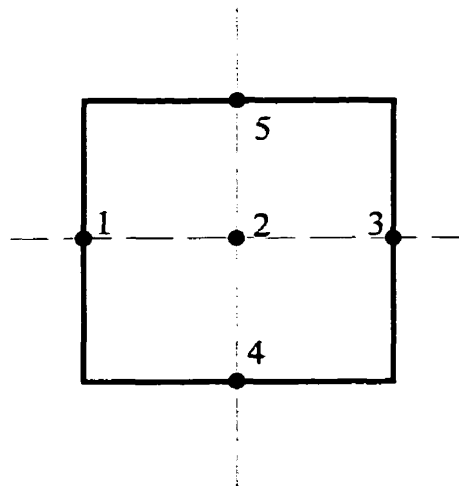
Geometry	Side dimension
Square	1.0 m
Small square	0.1 m

The permeability and compaction behavior of the reinforcement are measured experimentally and characterized respectively by the permeability curve of Figure 4.8 and the compaction curve of Figure 4.3.

Table 4.2. Reinforcement parameters.

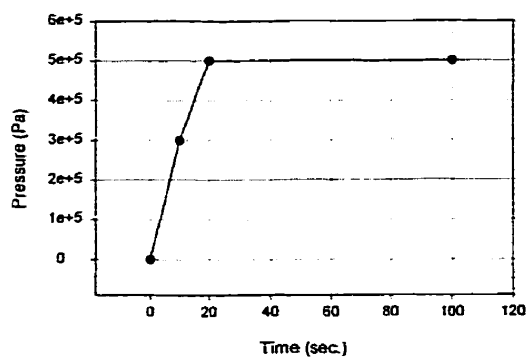
Reinforcement	h_0 (mm)	V_f^0	Number of layers
NCS 81053	6.62	0.42	12

The preform is saturated with a resin of viscosity 0.16 Pa.s. The numerical simulations are performed with meshes using conforming 3 nodes triangular elements. The preform is compressed on the surface of the square. Different loading curves are used in these tests. The pressure increases linearly from zero to a certain value, then this pressure is held until the end of the process. The square may be opened only on two parallel sides (type 1, boundary conditions), or on all four sides (type 2, boundary conditions). The resin pressure and the thickness are evaluated at five positions as indicated in Figure 4.10.

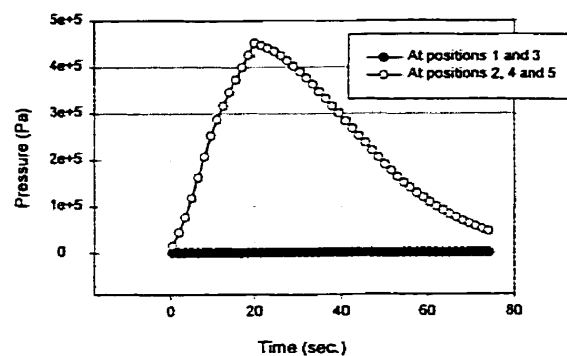
**Figure 4.10. Sensor positions for square tests.**

4.9.3 Results and discussion

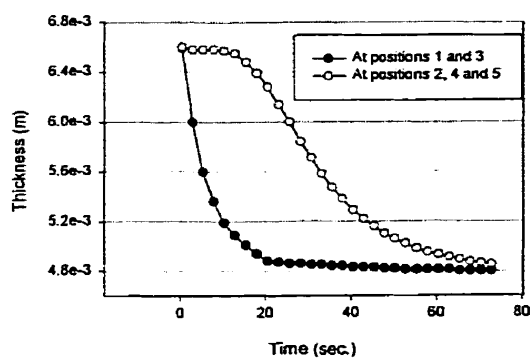
In simulations 1 and 2, the saturated preform is compressed in an autoclave. The loading curves are shown in Figures 4.11a and 4.13a. There are two phases: loading and holding. Simulation 1 has boundary conditions of type 1 and simulation 2 of type 2. During the linear loading time (up to 20 sec. in these cases), the resin pressure builds up with a plateau as indicated in Figures 4.12a and 4.14a. At the end of the loading phase, the resin pressure takes the shape of a parabola and reaches the maximum value at the center of the square. The distributions of the resin pressure are shown in Figures 4.12b and 4.14b. The higher the pressure, the smaller is the effective stress. Consequently, the preform is less compressed, i.e., its thickness remains larger. Figures 4.11b and 4.13b show the evolution of the resin pressure at the center and at the edges of the square. During the loading phase, the pressure curves of both cases are not different. But during the holding phase, the pressure goes down more quickly in simulation 2 than in simulation 1. As a result, the preform gets faster a uniform thickness as shown in Figures 4.11c and 4.13c. In both cases, the final thickness of the preform is 4.8 mm. This thickness is reached in around 80 sec. and 55 sec. respectively in simulations 1 and 2 as indicated in Table 4.3.



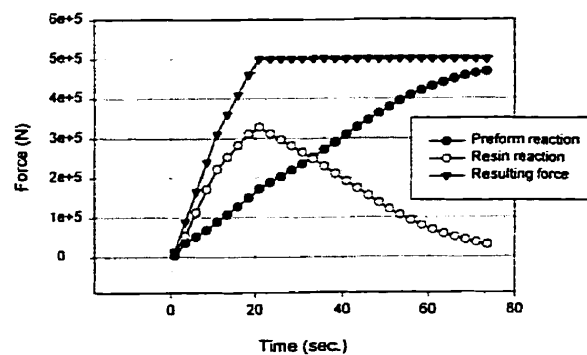
a) Loading curve



b) Pressure distribution



c) Thickness distribution



d) Preform reaction, resin reaction and resulting force

Figure 4.11. Simulation 1 in autoclave.

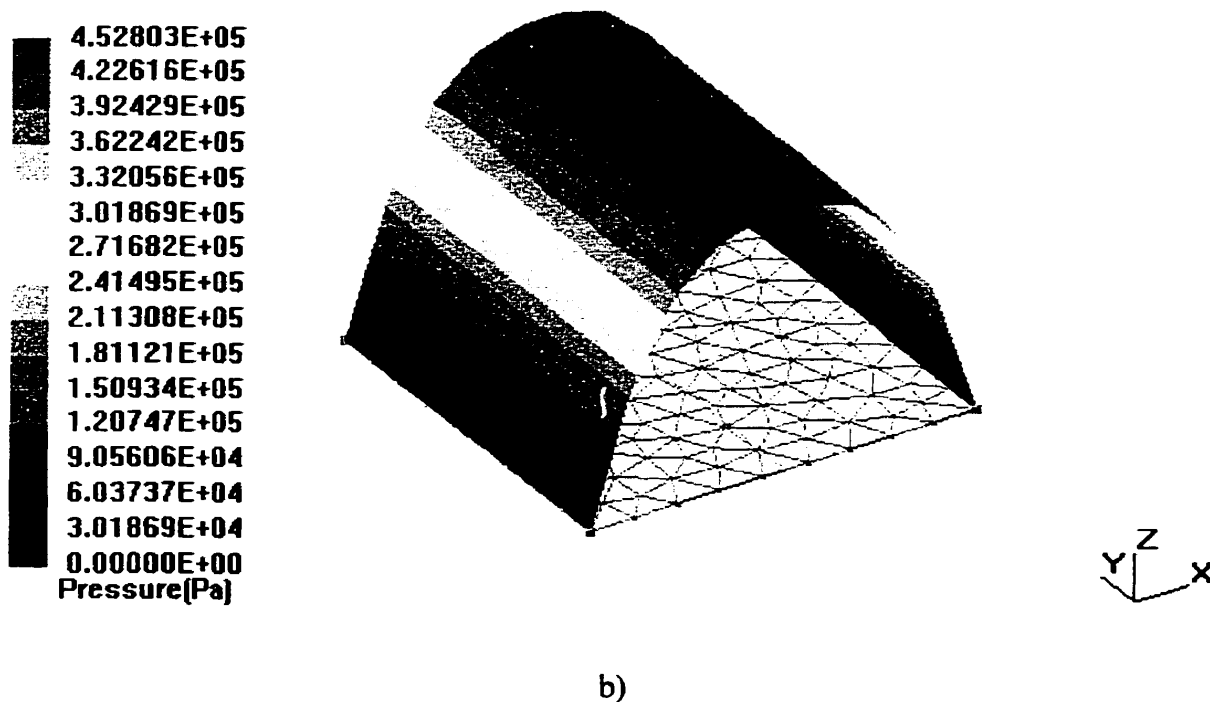
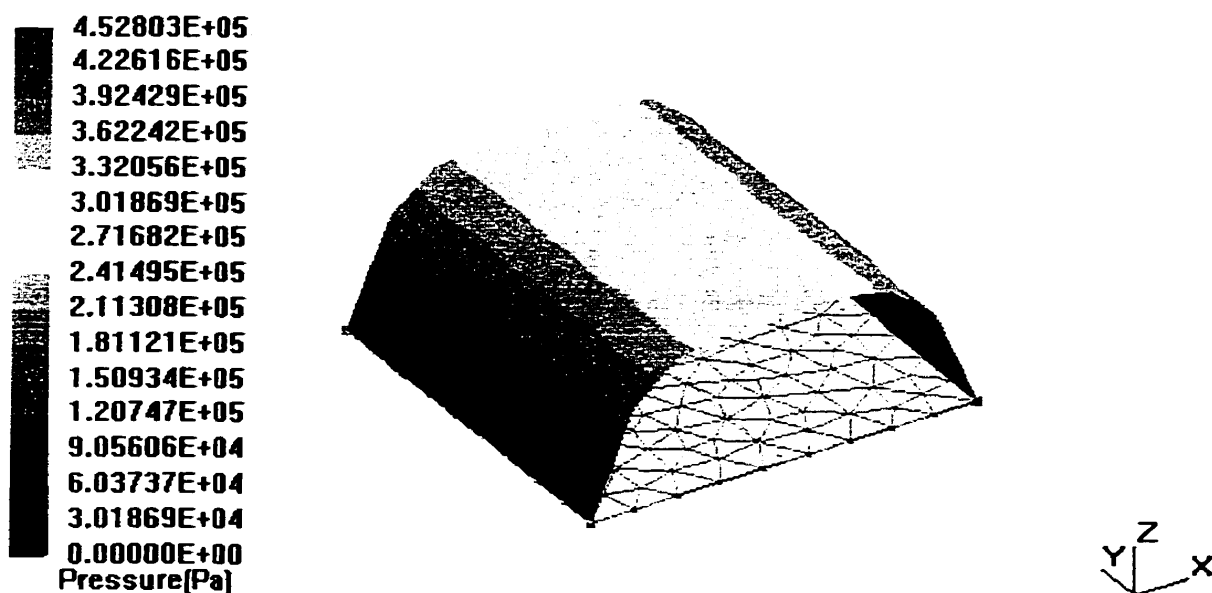


Figure 4.12. Pressure distribution of simulation 1: (a) at 10 sec., (b) at 21 sec.

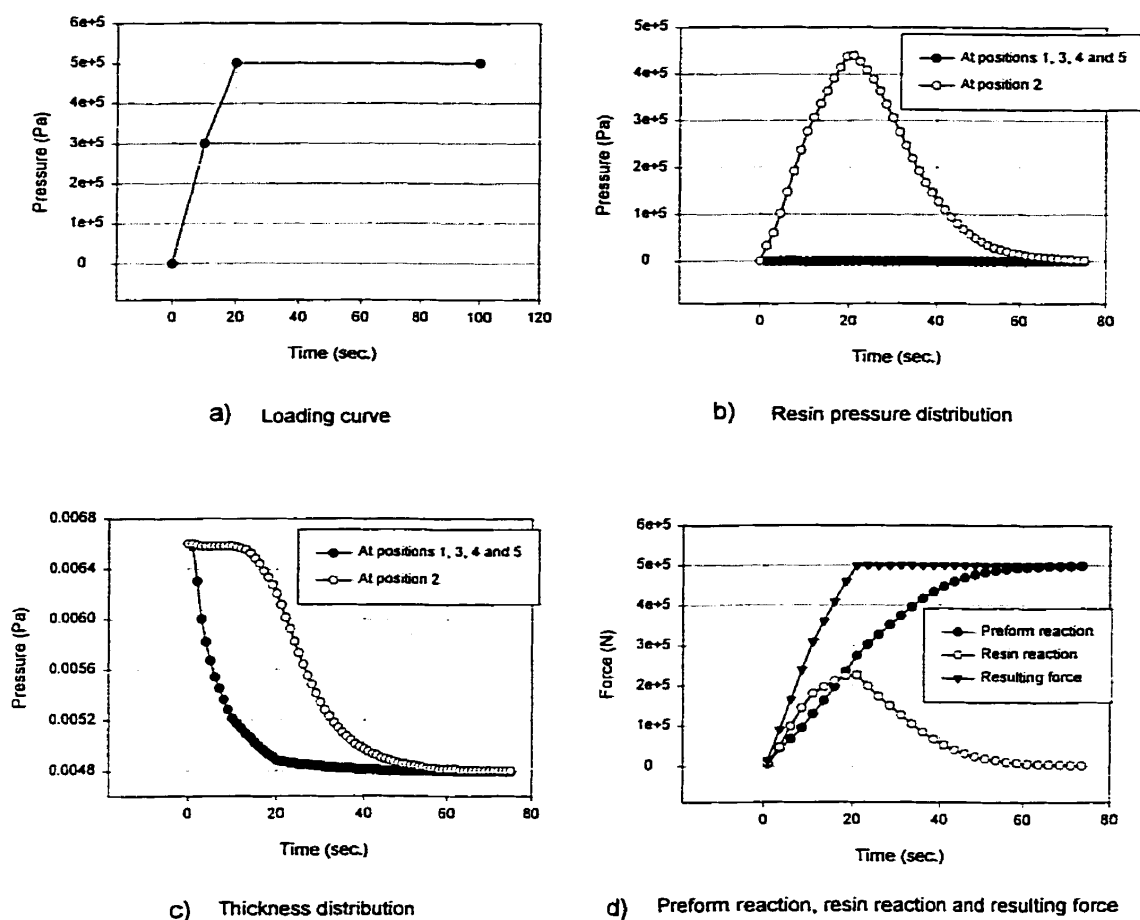
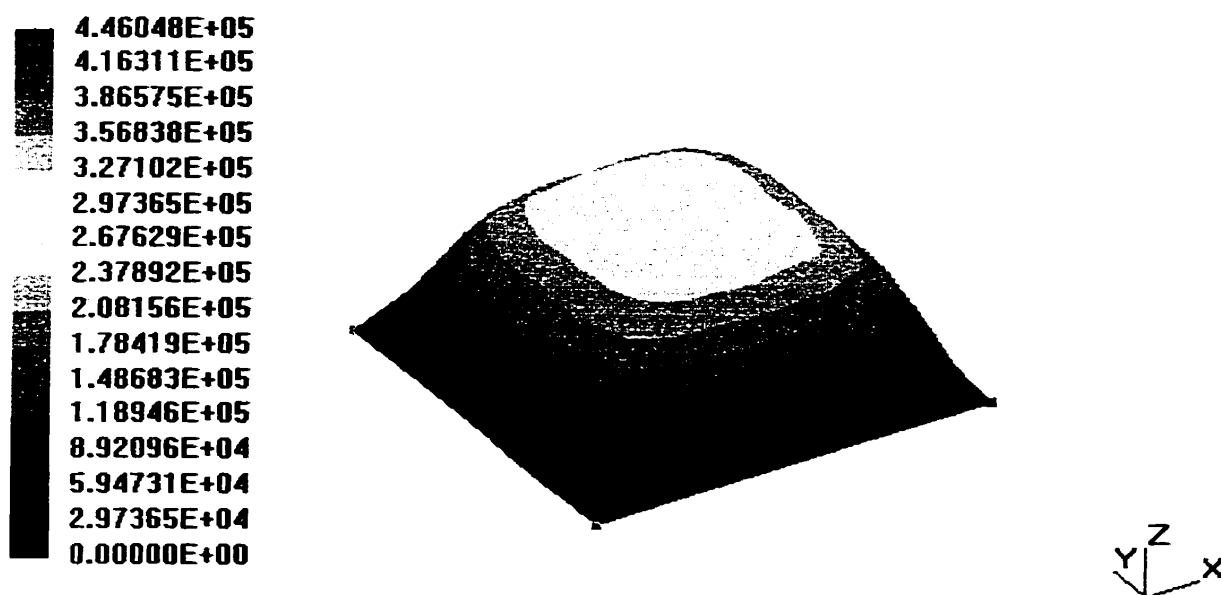
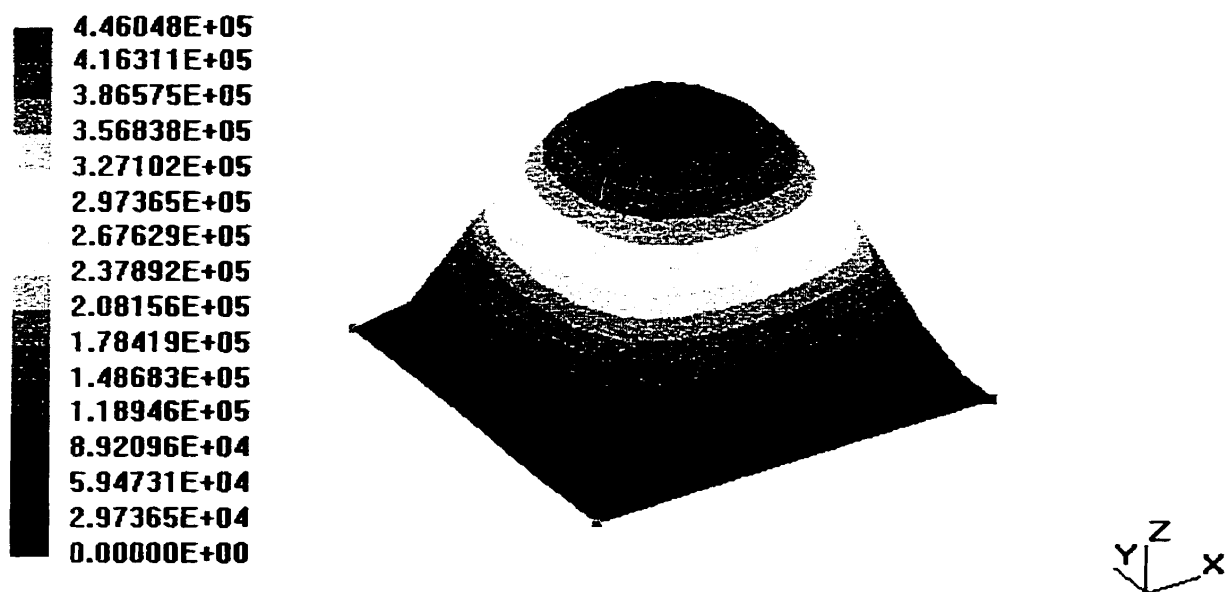


Figure 4.13. Simulation 2 in autoclave.

Depending on the choice of the boundary conditions, the process happens differently in terms of resin pressure distribution and thickness evolution. As indicated in Figures 4.11d and 4.13d, the resulting forces are the same in both cases, but the evolutions of the effective stress in the preform and the resin pressure are slightly different. The reaction of the preform relative to the resin reaction is stronger in simulation 2 than in simulation 1.



a)



b)

Figure 4.14. Pressure distribution of simulation 2: (a) at 10 sec., (b) at 21 sec.

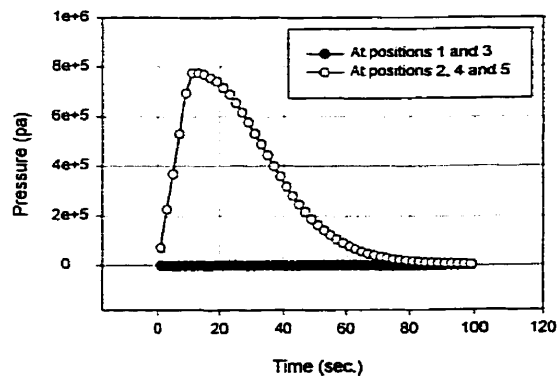
Instead of the load displayed in Figures 4.11a and 4.13a, now the preform is linearly compressed more quickly up to 0.8 MPa during only 10 sec. and this pressure is held until the end of the process. These two simulations, number 3 and 4, have also the two types of boundary conditions as indicated in Table 4.3. The same effect is observed here. Figures 4.15a and 4.15b show that during the loading phase, the pressure distributions at the center of the square are similar in both cases, but during the holding phase, the pressure in simulation 4 goes down more quickly. In both cases, the final thickness of the preform is 4.53 mm. This thickness is reached in around 70 sec. and 40 sec. respectively in simulations 3 and 4 as shown in Figures 4.15c and 4.15d.

Table 4.3. Simulation results in the square geometry.

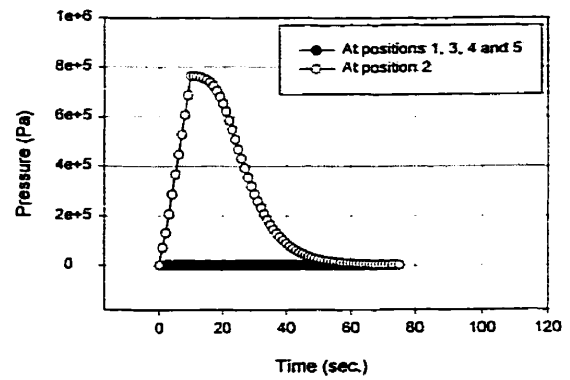
Simulation	Boundary conditions	Maximum loading pressure	Loading time	Maximum thickness difference	Final thickness
<i>Autoclave</i>					
1	Type 1	0.5 MPa	20 sec.	1% at 80 sec.	4.80 mm
2	Type 2	0.5 MPa	20 sec.	1% at 55 sec.	4.80 mm
3	Type 1	0.8 MPa	10 sec.	1% at 70 sec.	4.53 mm
4	Type 2	0.8 MPa	10 sec.	1% at 40 sec.	4.53 mm
<i>Vacuum</i>					
5	Type 1	0.1 MPa	10 sec.	1% at 125 sec.	5.80 mm
6	Type 2	0.1 MPa	10 sec.	1% at 90 sec.	5.80 mm

Now, simulations 5 and 6 are performed under vacuum. Again, they are of type 1 and 2, respectively. A full vacuum is reached at 10sec. inside the steel case, in which the pressure decreases linearly during the loading phase. A significant difference in the pressure is observed during the holding phase as depicted in Figures 4.16a and 4.16b. As a consequence, the time necessary for getting the uniform thickness in the final part is more different between them. In both cases, the final thickness of the preform is 5.8 mm.

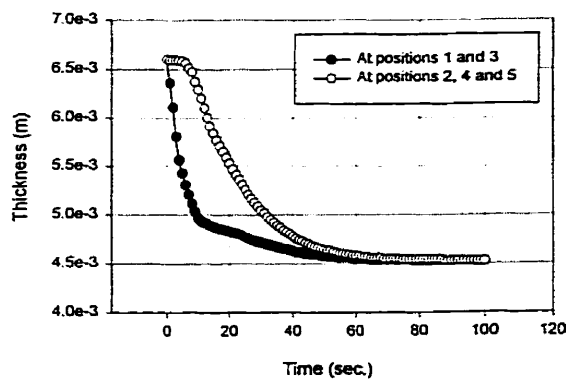
This thickness is reached in around 125 sec. and 90 sec. respectively in simulations 5 and 6 as shown in Figures 4.16c and 4.6d.



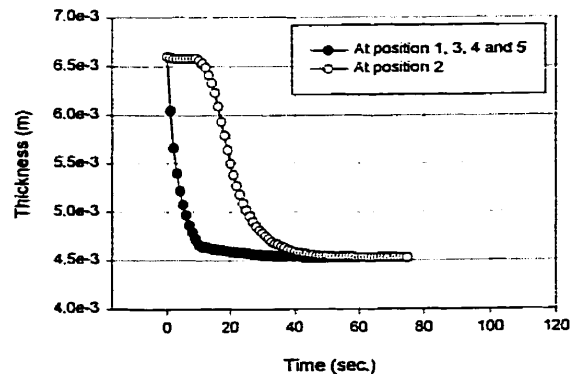
a) Resin pressure distribution



b) Resin pressure distribution



c) Thickness distribution



d) Thickness distribution

Figure 4.15. Simulations 3 and 4 in autoclave.

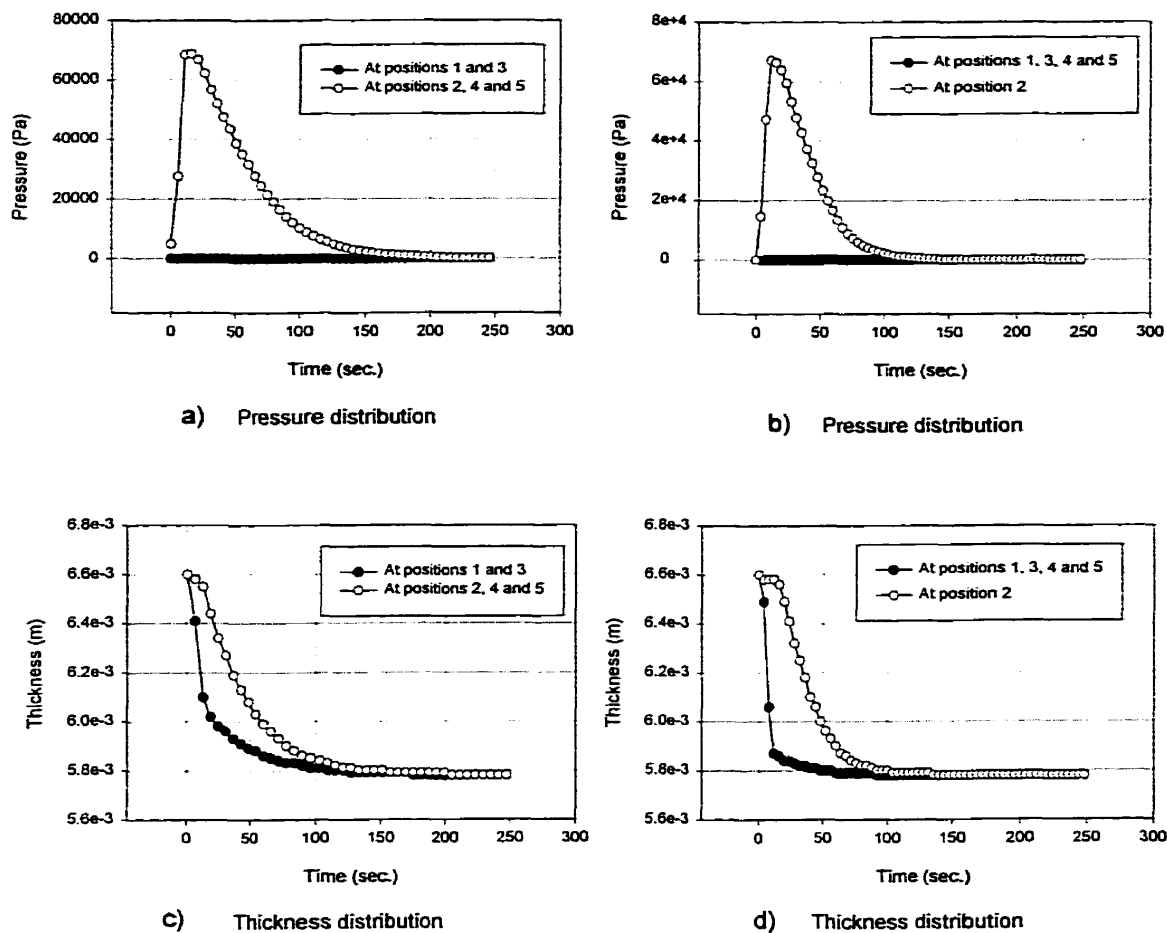


Figure 4.16. Simulations 5 and 6 under vacuum.

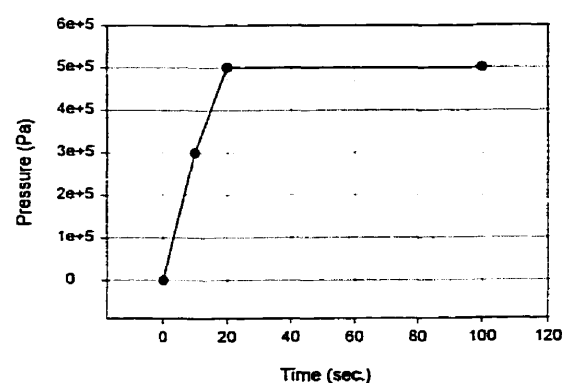
A summary of the first series of simulations is presented in Table 4.3. It is noticed that the final thickness depends on the maximum loading pressure. For a given reinforcement, the compaction curve gives the relation between the thickness and the loading pressure. Hence, in order to reach a given design thickness, it is necessary to set a predetermined pressure during the loading phase. This means that the flexible bladder process based on vacuum is valid for a relatively limited range of thickness, i.e. the fiber volume ratio achievable by this process is lower than in autoclave. In addition, these simulations show

that the time of the loading phase has little effect on the evolution of the thickness. Finally, the smaller the maximum loading pressure, the longer it will take to reach a uniform thickness. This critical time will be called the "homogeneous time". During the consolidation process, before the preform thickness becomes uniform, the thickness at the center is always larger than at other locations. If polymerization happens more early than this homogeneous time, the final composite part will not have a uniform thickness. Finally, the choice of the boundary conditions influence also the way the resin pressure decreases during the holding time and consequently the homogeneous time.

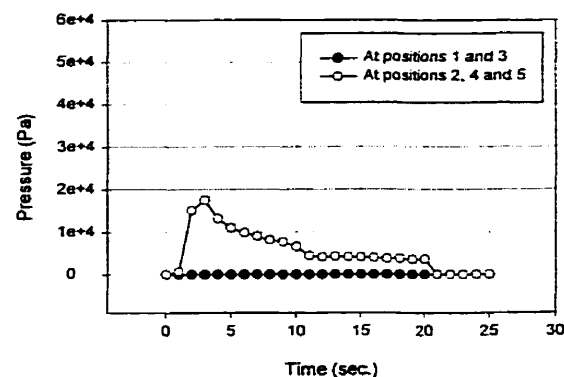
The second series of simulations are performed in the small square in order to study the influence of dimension. In simulation 7, the preform is compressed with the loading curve of Figure 4.17a. This is the same loading as in simulation 1. This simulation with boundary conditions of type 1 gave the resin pressure distribution of Figure 4.17b. In comparison to the results of simulation 1, the resin pressure in this simulation is very small. As a result, the thickness difference in the preform during the process is also very small as shown in Figure 4.17c. The homogeneous time in this case is around 20 sec., against 80 sec. in simulation 1. The final thickness of 4.8 mm is the same in both cases. Figure 4.17d indicates that, in this case, the loading is almost transferred completely to the reinforcement. The resin reaction is really negligible compared to the preform reaction.

It is remarked that the size of the part influences strongly the consolidation behavior of flexible bladder process. The maximum value of the resin pressure is very different from one simulation to the other. When the dimension is reduced from 1m to 0.1m with the same loading, the maximum resin pressure drops 25 times more in simulation 7 than in simulation 1. In turn, the homogeneous time is reduced four times, but the final thickness depends only on the value of the loading pressure. The larger the loading pressure, the smaller is the thickness, i.e. the higher will be the fiber volume ratio.

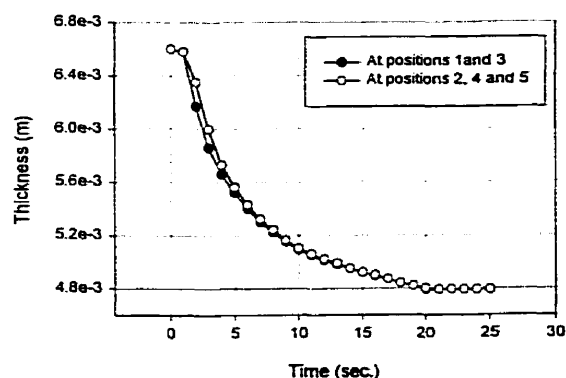
Two other simulations, numbers 8 and 9, with boundary conditions of type 1 are performed under vacuum. The vacuum is reached respectively in 5 sec. and 20 sec. inside the steel case, in which the pressure decreases linearly during the loading phase as shown in Figures 4.18a and 4.18b. Results show that the thickness difference in the preform during the process is very small as illustrated in Figures 4.18c and 4.18d. The homogeneous times are around 5 sec. and 20 sec., respectively, in simulations 8 and 9. The final thickness of 5.8 mm is reached in both cases.



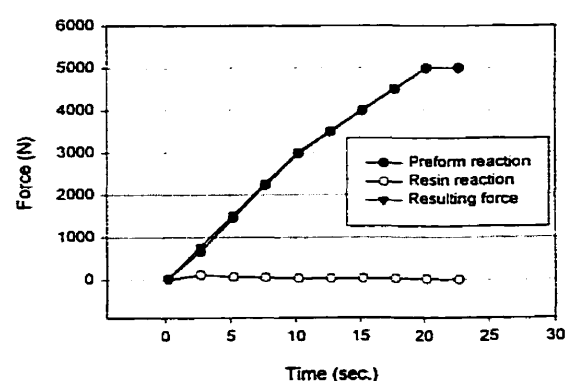
a) Loading curve



b) Resin pressure distribution



c) Thickness distribution



d) Preform reaction, resin reaction and resulting force

Figure 4.17. Simulation 7 in autoclave.

The results of this series of simulations is summed up in Table 4.4. The homogeneous time is equal exactly to the loading time in this series, but it is not the case in the series of simulation with the square of 1m. In other words, the loading phase in these cases has strong effect on the behavior of this process. The resin pressure during the holding phase almost vanishes.

In addition, because the resin pressure during the process is so small compared to the effective stress of the reinforcement in the simulations with the small square, the boundary has little effect on the process. The same result is obtained either for the boundary conditions of type 1 or 2.

Table 4.4. Simulation results in the small square geometry.

Simulation	Boundary conditions	Maximum loading pressure	Loading time	Maximum thickness difference	Final thickness
<i>Autoclave</i> 7	Type 1	0.5 MPa	20 sec.	1% at 20 sec.	4.80 mm
<i>Vacuum</i> 8	Type 1	0.1 MPa	5 sec.	1% at 5.5 sec.	5.80 mm
9	Type 1	0.1 MPa	20 sec.	1% at 20 sec.	5.80 mm

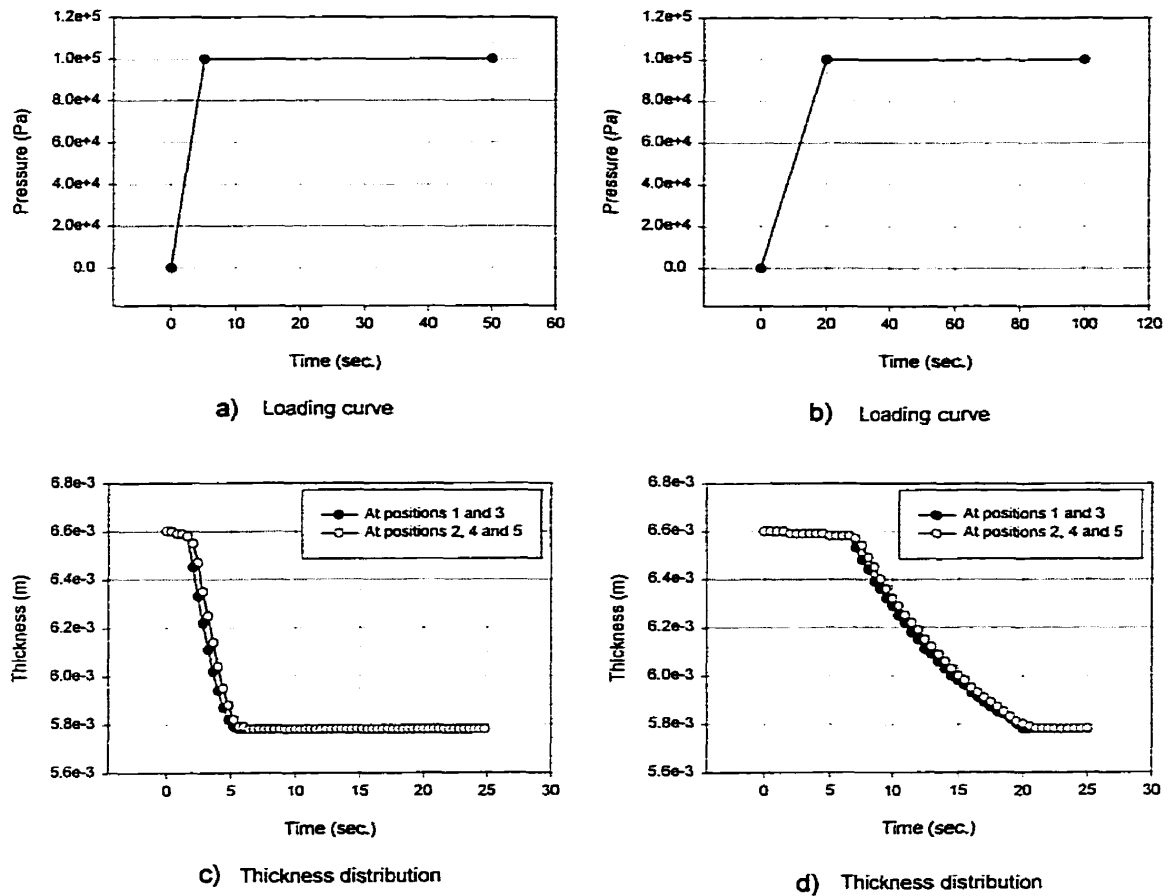


Figure 4.18. Simulations 8 and 9 under vacuum.

4.10 THIN SHELL CASE

4.10.1 Numerical simulations

Numerical simulations are performed for the thin shell whose dimensions are shown in Figure 4.19 with $L = 0.5$ m. The same material is employed as in the previous test, i.e., a preform of twelve layers of fabric NCS 81053 with an initial thickness h_0 and initial fiber

volume ratio Vf^0 as indicated in Table 4.2. The permeability and compaction behaviors of the reinforcement are measured experimentally and characterized respectively by the permeability curve of Figure 4.8 and the compaction curve of Figure 4.3.

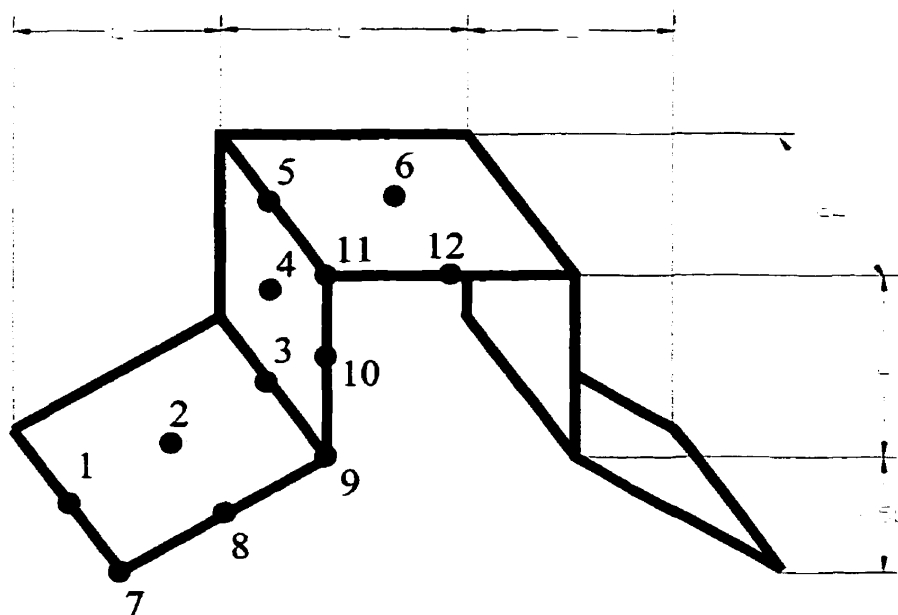


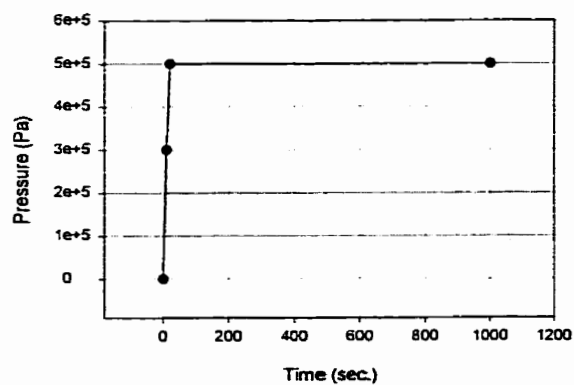
Figure 4.19. Geometry of the thin shell and positions of the sensors.

The preform is saturated with a resin of viscosity 0.16 Pa.s. The numerical simulations are performed with meshes using conforming 3 nodes triangular elements. The preform is compressed on its surface. Different pressure loading curves are used in these tests. The pressure increases linearly from zero to a certain value, then it is held until the end of the process. The preform may be opened only on two edges, i. e., boundary conditions of type 1, or on all sides, i. e., boundary conditions of type 2. The resin pressure and part thickness are evaluated at twelve positions as illustrated in Figure 4.19.

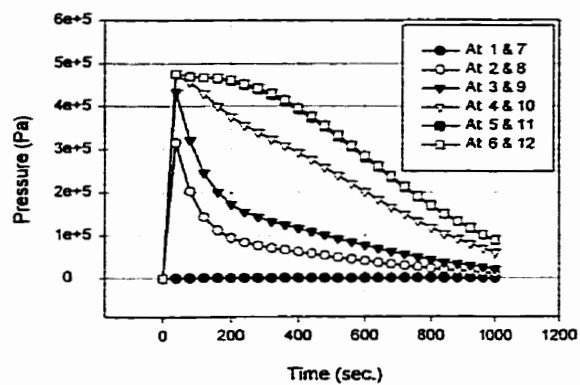
4.10.2 Results and discussion

Simulation 10 is performed with boundary conditions of type 1. The preform is compressed with the loading curve of Figure 4.20a. The loading pressure rises linearly in the autoclave up to $5.0\text{E}+5$ Pa during 20 sec. Then, the pressure is held until the end of the process to homogenize the thickness of the preform. Figure 4.20b shows the resin pressure evolution in the preform during 1000 sec. Figures 4.21a and 4.21b present the resin pressure distribution captured at 50 sec. and 200 sec. respectively. Even at 400 sec. the resin pressures are still quite different in the preform. Consequently, the thickness is really nonhomogeneous at that time. Figure 4.20c indicates that at 1000 sec. a difference of thickness of 2% is reached. As illustrated in Figure 4.20d, the loading pressure is transferred mainly to the resin during the first 200 sec. and to the reinforcement during the rest of the process. The homogeneous time is very large in this case. The process needs a considerable time to obtain a uniform thickness, much longer than in simulation 1. It is observed that the homogeneous time increases with the size of the part.

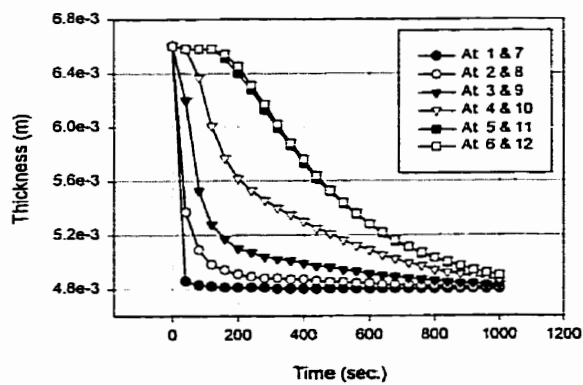
Sometimes, the time required by the process is limited by the polymerization of the resin. As in the analysis mentioned above, the choice of boundary conditions might shorten the homogeneous time. In simulation 11, all sides of the preform are opened. The preform is compressed by the same loading curve as in simulation 10 (see Figure 4.22a). Results show that there is a significant difference in the behavior of the process compared to simulation 10. The pressure gradient is much higher as presented in Figure 4.23. The opening of the boundary facilitates considerably the resin flow. As a result, the resin pressure in the preform goes down much more quickly and vanishes at around 120 sec. as illustrated in Figure 4.22b. It is observed also in Figures 4.22c and 4.22d that the thickness decreases in the same way. The thickness at the center is always larger than at other positions. The longer the time of process, the smaller is the difference. At 100 sec., the difference in the thickness of the preform is around 1%. This time is ten times shorter than in simulation 10.



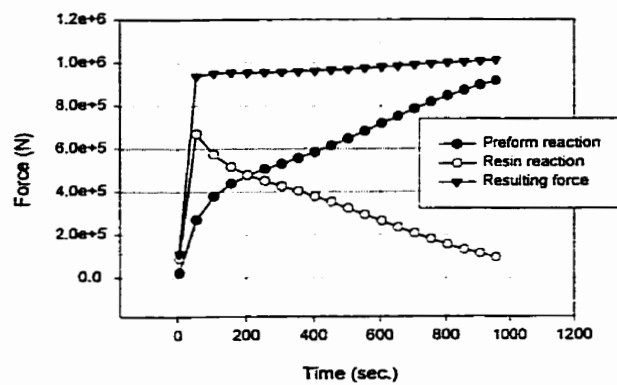
a) Loading curve



b) Pressure distribution



c) Thickness distribution



d) Preform reaction, resin reaction and resulting force

Figure 4.20. Simulation 10 in autoclave.

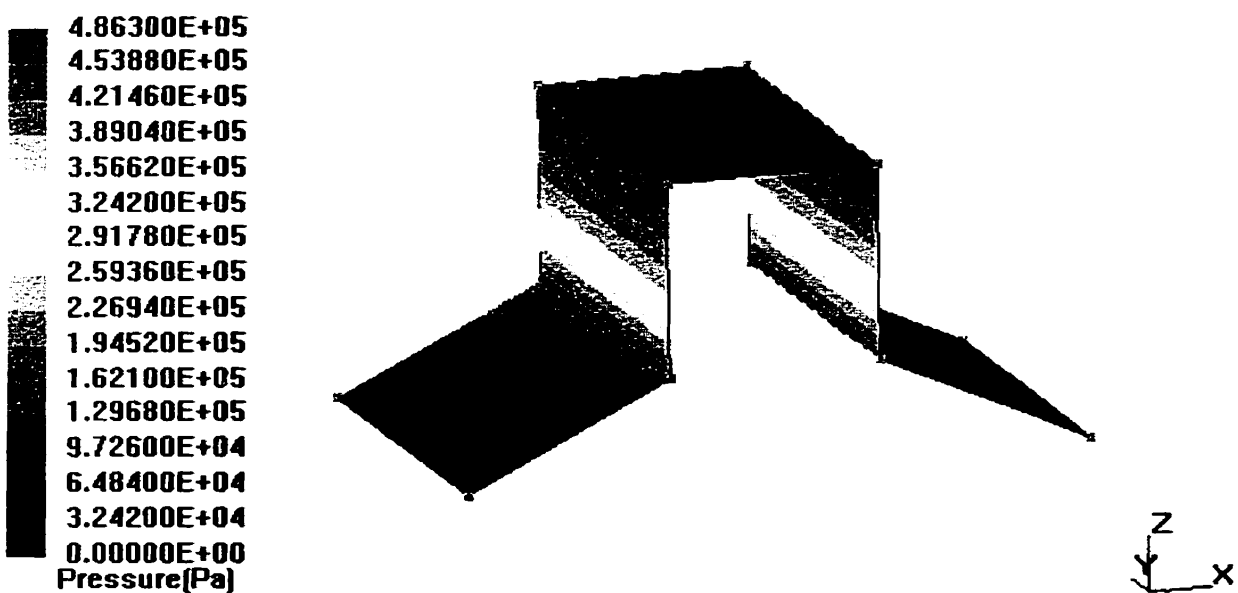
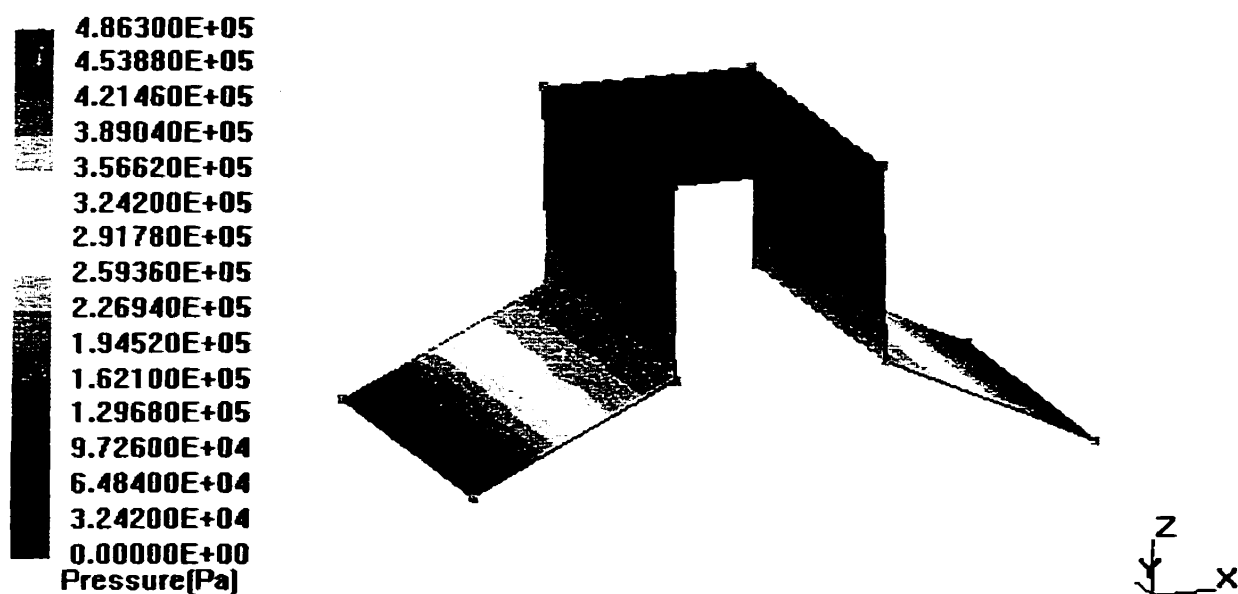
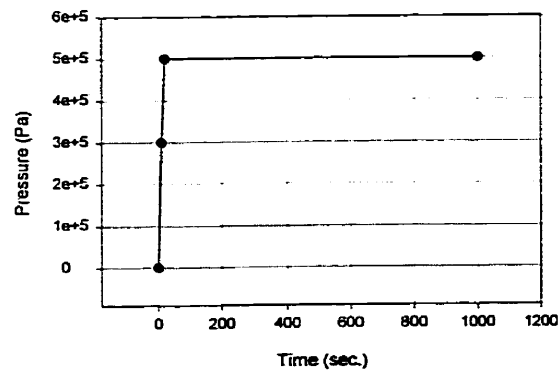
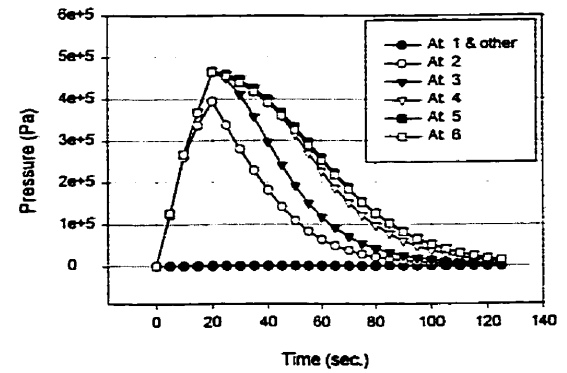


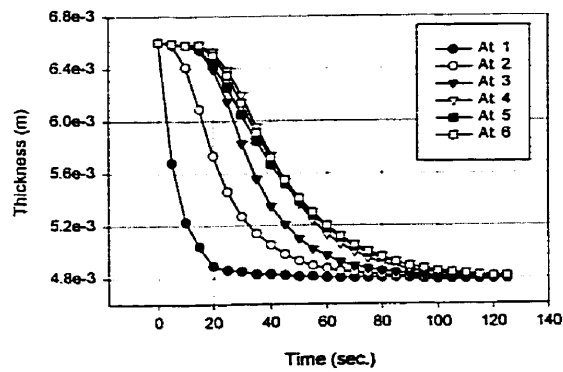
Figure 4.21. Pressure distribution of simulation 10: (a) at 50 sec., (b) at 200 sec.



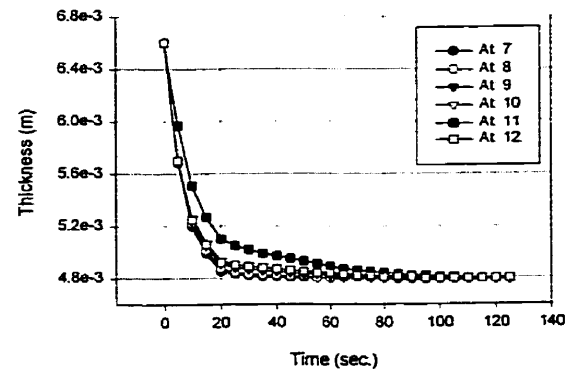
a) Loading curve



b) Pressure distribution



c) Thickness distribution



d) Thickness distribution

Figure 4.22. Simulation 11 in autoclave.

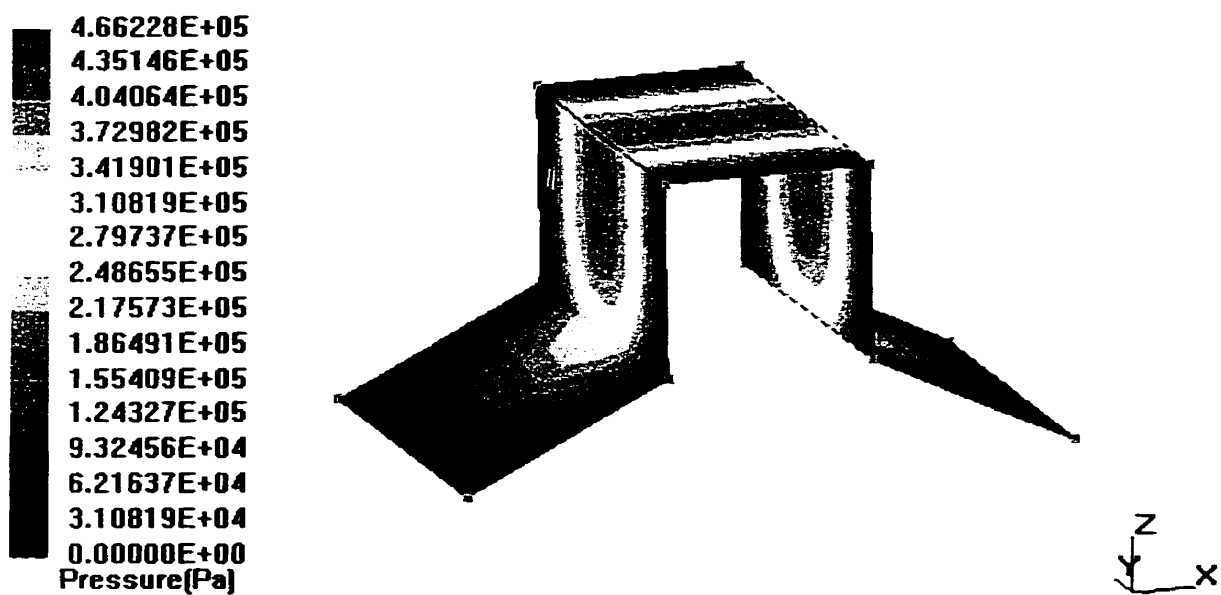
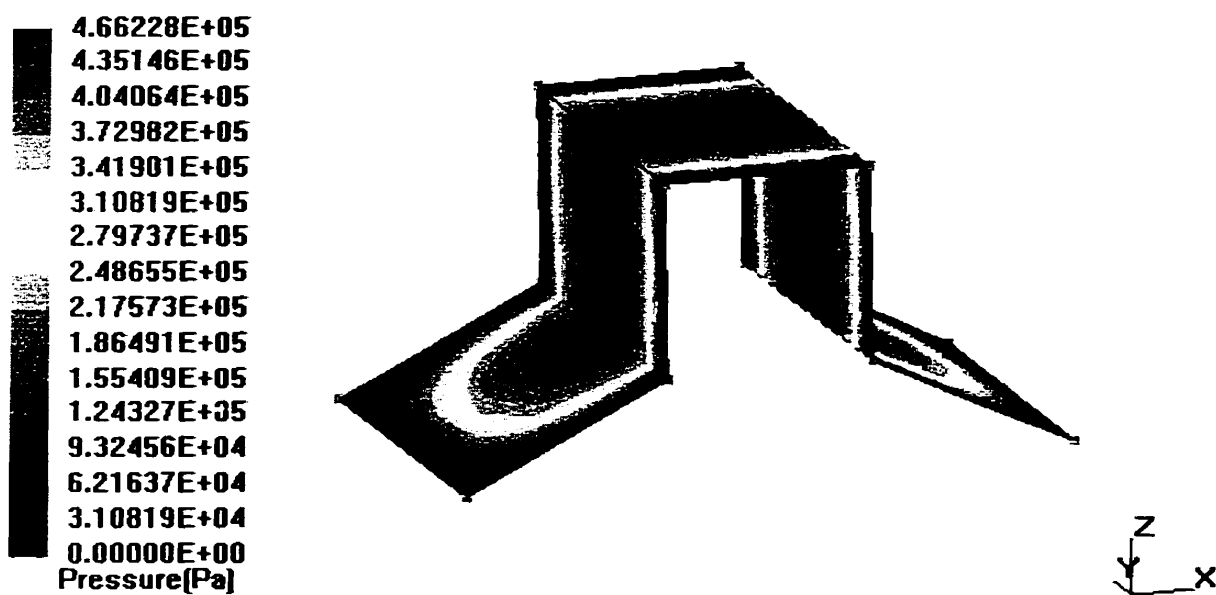


Figure 4.23. Pressure distribution of simulation 11: (a) at 20 sec., (b) at 40 sec.

One question arises here that if the loading pressure is raised higher during the loading phase, the homogeneous time would decrease considerably or not. To respond to this, simulations 12 and 14 are performed in the same condition as for simulation 10 except that the increase in loading pressure is different as indicated in Table 4.5. Results show that even if the maximum loading pressure is three times larger, the homogeneous time is not really shorter. Other simulations results are presented in Table 4.5. Simulations 13 and 15 are performed with boundary conditions of type 2, with the maximum loading pressure of 0.8 MPa and 1.5 MPa, respectively. Then, simulations 16 and 17 of type 1 and 2 follow. Both of them are performed under vacuum.

Table 4.5. Simulation results in the thin shell.

Simulation	Boundary conditions	Maximum loading pressure	Loading time	Maximum thickness difference	Final thickness
<i>Autoclave</i>					
10	Type 1	0.5 MPa	20 sec.	2% at 1000 sec.	4.80 mm
11	Type 2	0.5 MPa	20 sec	1% at 100 sec.	4.80 mm
12	Type 1	0.8 MPa	10 sec.	2% at 925 sec.	4.53 mm
13	Type 2	0.8 MPa	10 sec.	1% at 87 sec.	4.53 mm
14	Type 1	1.5 MPa	10 sec.	2% at 900 sec.	4.16 mm
15	Type 2	1.5 MPa	10 sec.	2% at 80 sec.	4.16 mm
<i>Vacuum</i>					
16	Type 1	0.1 MPa	10 sec.	4% at 1000 sec.	5.80 mm
17	Type 2	0.1 MPa	10 sec.	3% at 100 sec.	5.80 mm

In conclusion, all the simulations results realized with the thin shell geometry show that the homogeneous time is influenced strongly by the boundary conditions and on the contrary, weakly by the maximum pressure value during the loading phase. It is interesting to see that in these simulations, the maximum pressure value determines only the final thickness of the composite part.

As above mentioned, dimension plays an important role in this process. A series of simulations with a small thin shell are performed to study again this effect. The dimensions of the small thin shell are shown in Figure 4.19 where $L = 0.05$ m. The simulations results are summed up in Table 4.6. Simulations 18 and 19 with boundary conditions of type 1 and 2 respectively are performed in autoclave with a maximum pressure of 0.5 MPa. In both cases, the homogeneous time is around 20 sec., which is exactly the duration of the loading phase as indicated in Table 4.6. This time is much shorter than that of simulations 10 and 11. Remind that this phenomenon was also observed in simulations 8 and 9. In addition, simulations 20 and 21 of types 1 and 2 respectively are performed under vacuum. The same effect is observed here. The homogeneous time is shortened remarkably. It should be also noted that the boundary conditions influence more clearly the homogeneous time in these cases than in simulations 18 and 19.

Table 4.6. Simulation results in the smaller thin shell.

Simulation	Boundary conditions	Maximum loading pressure	Loading time	Maximum thickness difference	Final thickness
<i>Autoclave</i>					
18	Type 1	0.5 MPa	20 sec.	2% at 20 sec.	4.80 mm
19	Type 2	0.5 MPa	20 sec	0.1% at 20 sec.	4.80 mm
<i>Vacuum</i>					
20	Type 1	0.1 MPa	5 sec.	0.1% at 28 sec.	5.80 mm
21	Type 2	0.1 MPa	5 sec.	0.1 % at 7 sec.	5.80 mm

4.11 CONCLUSION

In this paper, a numerical model is derived from the equations of consolidation for flexible bladder process to manufacture thin composite parts. The numerical simulation for this process is based on the finite element method.

Firstly, a model for a simplified one-dimensional problem is used to compare the results obtained from analytical solutions, the finite difference and the finite element methods. A good agreement between them is reached in terms of resin pressure distribution. Then a series of simulation for the one-dimensional consolidation are performed with both the finite difference and finite element methods. The finite difference method shows the problem of instability. On the contrary, the finite element method is much more stable in spite of the complexity of the geometry, even for a relatively large time step in the calculation.

Secondly, the behavior of the flexible bladder process is studied in a square geometry. A square of length 1m and a small square of length 0.1 m are used to investigate the influence of dimensions. The results demonstrate that the size of the composite part has an important role in the behavior of the process. The distribution of the resin pressure and the evolution of the preform thickness are very different for the square and the small square. In the small square, the loading phase is the principal one during which all evolutions occur. The loading time is also the time necessary to get a uniform thickness. On the contrary, in the simulations with the square, the holding phase is much more important. Another important factor having a significant effect on the process is the choice of boundary conditions. A good choice of boundary conditions can reduce considerably the time to obtain a uniform thickness. It is noticed that the larger the dimension of the composite part, the longer is the process. The maximum value of the loading pressure has considerable effect in some cases, but little effect in other cases. It determines clearly the final thickness of the preform.

Finally, flexible bladder process is studied for a thin composite shell. As in the study with the square, two different dimensions of thin shell are used in this investigation. The results show that the same effects as with the square geometry are observed in this series.

In conclusion, the model described here allows the prediction of the distribution of the resin pressure, the evolution of the preform thickness during the flexible bladder process and the time necessary to obtain a uniform thickness in the final product. This study imposes first to understand the physical phenomenon of consolidation in the flexible bladder process. This work represents, however, only a first step to meet the requirements of the composite industry. In the future, this model must also be validated for specific industrial parts.

4.12 NOMENCLATURE

- K_{ml} permeability matrix ($m = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$)
- N_j interpolation functions ($j = 1, 2, 3 \dots$)
- dV elementary volume in the initial configuration
- dv elementary volume in the deformed configuration
- \bar{e}_l coordinate base vectors ($l = 1, 2, 3$)
- $h(t)$ preform thickness at time t
- p fluid pressure
- \hat{p} pressure test functions
- p_j pressure values at the degrees of freedom ($j = 1, 2, 3 \dots$)
- S preform cross-sectional area
- V^f fiber volume ratio
- V^{f^0} initial fiber volume ratio
- \bar{v}^f absolute velocity of the fluid particle
- v_n fluid normal velocity

- \bar{v}^f interstitial velocity of the fluid particle relative to fiber grid
 x_m system coordinates ($m = 1, 2, 3$)
 Γ boundary surface of the calculation domain
 Γ_0 boundary part where the condition v_n is specified
 Γ_1 boundary part where a given pressure is imposed
 Ω calculation domain
 δ_{ij} unit matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 ε_{vol} volumic dilatation
 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ deformation rate matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 η fluid kinematic viscosity
 μ fluid dynamic viscosity
 ρ^f fluid specific mass
 ρ^s solid specific mass
 σ_{ij} total stress matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 σ'_{ij} fiber bed stress matrix components ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)
 ω porosity of the porous medium
 ω_0, ω_f initial and final porosity of the porous medium

4.13 ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank gratefully the Ministry of Education of the Quebec Government and the National Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) for their financial supports and J.B. Martin Ltd. for providing the samples of reinforcement. Authors are grateful to Joël Bréard and Jean-François Remacle for their useful discussions and comments.

4.14 REFERENCES

1. Pham X.-T., F. Trochu and R. Gauvin. 1998. "Simulation of Compression Resin Transfer Molding with Displacement Control", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **17**(17):1525-1556.
2. Pham X.-T. and F. Trochu. 1998. "Simulation of Compression Resin Transfer Molding to Manufacture Thin Composite Shells", accepted in *Polymer Composites*.
3. Phelan, F. R. 1997. "Analysis of Injection/Compression Composite Molding", *ICAC97*, pp. 417-424.
4. Gutowski, T. G., Z. Cai, S. Bauer, D. Boucher, J. Kingery and S. Wineman. 1987. "Consolidation Experiments for Laminates Composites", *Journal of Composites Materials*, **21**:650-669.
5. Gutowski, T. G., T. Morigaki and Z. Cai. 1987. "The Consolidation of Laminate Composites", *Journal of Composites Materials*, **21**:172-188.
6. Dave, R., J. L. Kardos and M. P. Dudukovic. 1987. "A Model for Resin Flow During Composite Processing : Part 1 - General Mathematical Development", *Polymer Composites*, **8**(1):29-38.
7. Dave, R., J. L. Kardos J. L. and M. P. Dudukovic. 1987. "A Model for Resin Flow During Composite Processing : Part 2 - Numerical Analysis for Unidirectional Graphite/Epoxy Laminates", *Polymer Composites*, **8**(2):123-132.
8. Biot, M. A. 1941. "General Theory of Three-Dimensional Consolidation", *Journal of Applied Physics* , **12**:155-164.

9. Terzaghi, K. 1943. *Theoretical Soil Mechanics*. John and Sons, New York.
10. Batch G. L. and S. Cumiskey. 1990. "Multilayer Compaction and Flow in Composites Processing", *SPI Conference*, (February).
11. Gauvin R., Y. Lemenn Y., P. Clerk P. and F. Trochu. 1994. "Compaction and Creep Behavior of Glass Reinforcements for Liquid Composites Molding", *10th ASM/ESD Advanced Composites Conference*, (June), pp. 357-367.
12. Kim Y.R. McCarthy P., Fanucci J.P. 1991. "Compressibility and Relaxation of Fiber Reinforcement During Composites Processing", *Polymer Composites*, February, 12(1):13-19.
13. Robitaille, F. and R. Gauvin. 1998. "Compaction of Textile Reinforcements for Composite Manufacturing: I. Review of Experimental Results", accepted in *Polymer Composites*.
14. Robitaille, F. and R. Gauvin. 1998. "Compaction of Textile Reinforcements for Composite Manufacturing: II. Compaction and Relaxation of Dry and H₂O-Saturated Woven Reinforcements", accepted in *Polymer Composites*.
15. Zienkiewicz, O. C. and R. L. Taylor. 1989. *The Finite Element Method. Volume 1*. Mc GrawHill Book Company, 648 pages.
16. Zienkiewicz, O. C. and R. L. Taylor. 1991. *The Finite Element Method. Volume 2*. Mc GrawHill Book Company, 807 pages.

Conclusion et perspectives

L'étude de l'effet de la compression sur les procédés de mise en forme des matériaux composites tels que le moulage par transfert de résine avec compression (CRTM) ou le procédé de vessie a fait l'objet de ce travail. Dans ces procédés, le renfort saturé ou partiellement saturé de résine est comprimé avec une pression à travers une plaque rigide ou un sac flexible.

Notre travail s'est concentré sur deux aspects : théorique et numérique. Le principal phénomène physique dans la fabrication des composites par injection-compression est la consolidation. Tout d'abord, une étude fondamentale de la consolidation a été réalisée. Il s'agit d'étudier l'écoulement d'un fluide newtonien dans un milieu poreux déformable sous l'action d'une compression. Les équations de la consolidation appliquées à la fabrication des composites par compression sont dérivées par application de la théorie de la mécanique des milieux poreux déformables en employant les principes de la mécanique des milieux continus. Tous les paramètres physiques du problème de la consolidation ont été analysés. Le milieu poreux est composé de deux phases. La structure de la phase solide (le renfort fibreux) est considérée comme un squelette et la phase fluide est la résine. Le milieu entier se déforme en satisfaisant la condition d'équilibre de la mécanique des milieux continus. L'écoulement de la résine dans le renfort est gouverné par la loi de Darcy. La compression est équilibrée d'une part par le renfort et d'autre part par la résine. L'équation de continuité exprime la conservation des masses solide et fluide au cours de la déformation. Cette étude a permis particulièrement de mettre en évidence les conditions aux limites qui sont capables de représenter exactement la physique du problème.

L'étude théorique de la consolidation est une partie très importante de cette thèse. Tout le reste de la thèse est basé principalement sur cette étude. Physiquement, les variantes des

procédés de fabrication des composites par injection-compression se différencient éventuellement par le choix des conditions aux limites imposées sur les parois mobiles.

Après avoir obtenu ces équations, nous avons appliqué un algorithme numérique de résolution pour simuler l'écoulement de la résine dans des renforts fibreux déformables, concrètement pour des procédés CRTM et procédé de vessie. Un nouveau module de compression a été implémenté dans le logiciel LCMFLOT. Ce dernier est un logiciel, développé en langage C++ avec une programmation orientée objet au laboratoire CRASP de l'École Polytechnique de Montréal pour la simulation numérique des procédés RTM. Ce nouveau module permet de simuler les procédés de moulage par transfert de résine avec compression (CRTM) en contrôle de déplacement et les procédés de vessie en contrôle de pression.

La simulation numérique est basée sur un algorithme de résolution qui est une procédure pas-à-pas. À chaque pas de calcul, le domaine de calcul est modifié et les paramètres physiques sont réactualisés. La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre les équations de la consolidation pour tous les problèmes étudiés dans cette thèse. La pression et la vitesse de la résine sont déterminées grâce aux calculs par éléments finis. Quand c'est nécessaire, l'avancement du front de la résine dans le renfort déformable s'effectue par un algorithme de remplissage basé sur la conservation de la masse de la résine (algorithme plus heuristique).

Une méthode de mise en forme des matériaux composites par injection-compression est présentée dans l'article intitulé "*Simulation of Compression Resin Transfer Molding with Displacement Control*". Un modèle bidimensionnel dérivé de l'équation de continuité a été utilisé pour simuler le procédé CRTM en contrôle de vitesse de déplacement. Le problème a été étudié avec une géométrie rectangulaire simple. La consolidation est unidirectionnelle dans la direction de l'épaisseur et l'écoulement de la résine est bidimensionnel. L'algorithme de remplissage a été construit de façon que la masse totale

de la résine soit conservée au cours du remplissage. La conservation du schéma de remplissage est un gage d'un bon formalisme de ce type de modèle. Cet algorithme est capable de capturer le changement du facteur de remplissage causé d'une part par la déformation du renfort avant le remplissage et d'autre part par le remplissage. La procédure de calcul donne de bons résultats. Il existe un bon accord entre le modèle numérique 2D et la solution analytique 1D adapté à la compression transverse uniaxiale.

Les résultats de cette étude ont montré que la distribution de la pression dans le procédé CRTM a une forme parabolique. La pression de la résine augmente linéairement avec la vitesse de compression à partir de la paroi mobile du moule. La valeur maximale de la pression peut être très grande par rapport à la pression d'injection dans le procédé classique RTM. L'effet de la compression est important en termes de pression, mais pas toujours en termes de temps de remplissage. Cela dépend beaucoup du matériau utilisé pour la préforme. Plus grande est la perméabilité, plus la réduction de temps de remplissage peut être obtenue par la compression. Pour un procédé CRTM, le choix de la vitesse de compression dépend des paramètres physiques de la préforme tels que les courbes de perméabilité et de compaction, de la viscosité de la résine et de la géométrie du moule. De plus, ce choix doit tenir compte du fait que la haute pression de la résine demande un moule de haute qualité et rend donc le procédé CRTM plus cher.

En fait, dans l'industrie pour le moment, un grand nombre des pièces composites sont minces et possèdent une géométrie quelconque dans l'espace. Dans ce contexte, une étude de la fabrication des pièces composites minces par CRTM en contrôle de déplacement a été réalisée. Un modèle numérique est dérivé des équations de la consolidation. La modélisation s'effectue avec des éléments de "plaque mince" triangulaires. Premièrement, ce modèle a été validé pour un écoulement unidimensionnel dans une cavité rectangulaire. Les simulations numériques ont été comparées avec la solution analytique et les résultats expérimentaux. Nous avons observé un excellent accord entre eux en termes d'avancement du front de résine et de pression de la résine.

Deuxièmement, un écoulement bidimensionnel a été également validé. L'écoulement de la résine a été calculé dans le système des coordonnées cartésiennes. Les résultats numériques obtenus par ce modèle ont été comparés avec la solution analytique. Encore une fois, nous avons observé que les résultats numériques sont très proches de la solution analytique en termes de temps de remplissage et de pression de la résine. Finalement, des simulations numériques ont été réalisées pour des pièces composites minces. Les résultats ont montré que le modèle permet de bien prédire l'écoulement de la résine dans les procédés CRTM. Plusieurs types de conditions aux limites peuvent être choisies telles que l'injection en contrôle de pression ou de débit. La pression ou le débit d'injection peut être constant ou fonction du temps. Cela permet de mieux représenter la physique des procédés CRTM. En outre, la vitesse de compression pendant le procédé peut être également constante ou fonction du temps. Grâce à ces options, l'utilisateur du logiciel LCMFLOT peut jouer sur plusieurs paramètres pour simuler le procédé CRTM afin d'optimiser l'ensemble des paramètres.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous avons présenté la méthode de mise en forme par compression via une membrane flexible. Cette technique appelée procédé de vessie, est aussi utilisée couramment dans l'industrie. Un modèle numérique dérivé des équations de la consolidation a été appliqué pour modéliser le procédé de vessie employé pour fabriquer des pièces composites minces. Le comportement de ce type de procédé a été analysé. Les résultats ont montré que la dimension de la pièce composite a une grande influence sur le comportement du procédé. La distribution de la pression de la résine et l'évolution de l'épaisseur de la préforme varient énormément avec la grandeur de la pièce. Il en résulte que le temps nécessaire pour atteindre une épaisseur uniforme dans la pièce finale est également très différent. Plus grande est la dimension, plus long est le temps pour obtenir une épaisseur uniforme. Le choix des conditions aux limites correspondant à un choix technologique pour l'industrie est aussi un facteur très important. On a remarqué qu'un bon choix de condition aux limites peut réduire considérablement le temps pour obtenir l'épaisseur uniforme; et que la valeur maximale

de la pression de compression a une grande influence dans certains cas, mais petite dans d'autres cas. C'est la valeur de la pression maximale de la résine qui décide l'épaisseur finale de la pièce composite fabriquée par la technique de la vessie. En conclusion, ce modèle permet de prédire la distribution de la pression de la résine et l'évolution de l'épaisseur dans le procédé de vessie. L'utilisateur peut simuler la vessie de type vide ou autoclave avec une géométrie quelconque et avec plusieurs choix de conditions aux limites.

En conclusion, jusqu'à présent le module de compression du logiciel LCMFLOT permet de simuler les procédés CRTM et le procédé de vessie pour fabriquer des composites minces. Le principal travail de cette thèse a été d'analyser le rôle de la compression dans des procédés de la fabrication des pièces composites. La compression donne deux avantages importantes. Le premier avantage : la pièce composite est forcée de prendre la forme du moule par la compression avec une épaisseur et un taux de fibre déterminés. De plus, grâce à la compression à haute pression, on peut obtenir dans la pièce finale un taux de fibre beaucoup plus élevé que celui obtenu par un procédé classique tel que le RTM. Le second avantage: la compression crée un gradient de pression beaucoup plus élevé au front de la résine. En conséquence, la résine au front avancera plus facilement et plus rapidement. Il en résulte que le temps de remplissage est plus court et que les zones sèches sont évitées dans les pièces finales. Finalement, la pièce obtenue par cette méthode possède une meilleure qualité : plus uniforme, plus homogène et plus résistante mécaniquement.

Dans cette thèse, nous avons supposé que la déformation du renfort dans la direction de l'épaisseur est dominante et que les autres sont négligeables devant celle-ci. En outre, il est aussi supposé que la déformation est linéaire tout au long de l'épaisseur. Ces suppositions nous permettent de modéliser la consolidation ayant lieu uniquement dans l'épaisseur du renfort avec le type d'élément de "plaque mince". Quand le moule a une forme non régulière, la supposition de déformation linéaire n'est plus valable. Dans ce

cas, un comportement complet du renfort est nécessaire pour modéliser la consolidation. L'annexe IV de cette thèse présente une étude préliminaire de la résolution des équations de la consolidation par la méthode des éléments finis. Cette étude révèle que tous les types de procédés de mise en forme des composites par compression peuvent être modélisés. Les conditions aux limites imposées à la paroi mobile sont capables de représenter la compression par un déplacement ou une force globale (plaque rigide), ou par une pression (membrane flexible). Cependant, en général le renfort fibreux est un matériau orthotrope. Il faut donc quatre coefficients indépendants pour définir un comportement bidimensionnel du renfort, ou neuf pour un comportement tridimensionnel. Jusqu'à présent, faute de connaissance d'un comportement complet du renfort, on rencontre des difficultés dans la modélisation des procédés de mise en forme des pièces composites par compression. Donc, des études expérimentales du comportement des renforts fibreux seront une étape très importante dans l'avenir. Cela permettra de compléter l'étude numérique accomplie dans cette thèse.

En outre, dans cette thèse, nous avons mentionné uniquement la déformation du renfort sous l'action de la compression. Mais, dans le domaine de la fabrication des composites par injection-compression, un autre type de déformation est observé. C'est la déformation du renfort sous l'action de l'écoulement de la résine à grand débit, par exemple au voisinage du seuil d'injection. Ce phénomène a été observé par Han et al. (1993), Trevino et al. (1995) et Wu et al. (1994), et très récemment étudié par Ambrosi et al. (1998). À cause de cette déformation, un espace libre est créé dans le moule. Quand cet espace est petit, on a tendance à utiliser l'équation de Darcy équivalente pour l'écoulement de la résine dans l'espace libre. Toutefois, cette méthode est très limitée. Généralement, l'écoulement de la résine dans cet espace ne peut plus être gouverné par la loi de Darcy. Un nouveau type d'écoulement couplé espace libre/milieu poreux est posé ici. On peut constater que l'effet de bord dans le procédé RTM appartient aussi à ce type d'écoulement. Une façon très naturelle pour modéliser ce type d'écoulement est d'utiliser les équations gouvernant les écoulements dans chaque région : Stokes pour l'espace libre

et Darcy dans le milieu poreux. Le point important ici est la condition imposée à l'interface entre ces deux milieux. Une étude préliminaire est présentée dans l'annexe V. Les conditions à l'interface entre l'espace libre et le milieu poreux sont imposées dans la formulation faible du problème. Ce type d'écoulement est un objectif important qui nous permettra de mieux modéliser les procédés de mise en forme des composites en général.

Dans le contexte de cette thèse, le phénomène de la consolidation est seulement étudié à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle des chaînes et des trames du renfort. Très récemment, dans la littérature des études d'écoulement fluide à double échelle dans le milieu poreux sont apparues comme une voie intéressante pour de nouvelles recherches. L'idée de cette méthode est d'analyser l'écoulement du fluide en même temps aux échelles microscopique et macroscopique. Cette étude est très récente et les résultats pour les applications, surtout pour la fabrication des pièces composites sont encore une question ouverte.

Bibliographie

ADAMS K. L., MILLER B. et REBENFELD L. (1986). Forced In-Plane Flow of An Epoxy Resin in Fiber Networks. Polymer Engineering and Science, vol. 26, pp. 1434-1441.

ADAMS K. L., MILLER B. et REBENFELD L. (1989). Radial Penetration of A Viscous Liquid into A Planar Anisotropic Porous Medium. Int. J. of Multiphase Flow, vol. 14, pp. 203-215.

AMBROSI D. et PREZIOSI L. (1998). Modelling matrix injection through elastic porous preforms. Journal of Composites, Part A, vol 29A, pp 5-18.

AOYAGI H., UENOYAMA M. et GUÇERI S. I. (1992). Analysis and Simulation of Structural Reaction Injection Molding (SRIM). Int. Polymer Processing VII, pp. 71-83

AUDET M. (1996). Simulation Numérique Tridimensionnelle du Transfert de Chaleur dans les Moules pour Matériaux Composites. Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

BAKALAMIAN (1995). Études de la Perméabilité et de la Compressibilité. Rapport de stage, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, Chapitre 4, pp. 46-55.

BATCH G.L. et CUMISKEY S. (1990). Multilayer Compaction and Flow in Composites Processing. SPI Conference, February, session 9A, pp. 1-11

BATHE K. J. (1982). Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Inc., 735 pages.

BEAR J. (1972). Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier. Environmental Science Series, 764 pages.

BEAVERS G. S. et JOSEPH D. D. (1967). Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall. J. Fluid Mech., vol.30, part 1, pp. 197-207.

BEAVERS G. S. et SPARROW E. M. (1969). Non-Darcy Flow Through Fibrous Porous Media. J. of Applied Mechanics, December, pp. 771-714.

BEAVERS G. S., SPARROW E. M. et MASHA B. A. (1974). Boundary Conditions at a Porous Surface which Bounds a Fluid Flow. AIChE Journal, May, vol. 20, No.3, pp.596-597.

BELKEZIZ A. et MAGNAN J. P. (1982). Analyse Numérique de la Consolidation Bidimensionnelle des Sols Élastoplastiques. Ministère de l'Urbanisme et du Logement, Ministère des Transports, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 159 pages.

BELLET M. et CHENOT J. L. (1993). Computational Methods for Free and Moving Boundary Problems in Heat and Fluid Flow. Chapter 13: A Lagrangian Approach to Fluid Flow in Metal Casting Process. Computational Mechanics Publication, pp.287-316.

BIOT M. A. (1941). General Theory of Three-Dimensional Consolidation. Journal of Applied Physics, vol. 12, February. pp. 155-161.

BRÉARD J. (1997). Matériaux Composites à Matrice Polymère : Modélisation Numérique de la Phase de Remplissage du Procédé RTM et Détermination Expérimentale de la Perméabilité d'un Renfort fibreux. Thèse de doctorat, Université du

Havre, France, 195 pages.

CAI Z. (1992). Analysis of Molding Filling in RTM Process. J. of Composites Materials, vol. 26, No. 9, pp. 1310-1338.

CAI Z. (1992). Simplified Mold Filling Simulation in Resin Transfer Molding. J. of Composites Materials, vol. 26, No. 17, pp. 2606-2630.

CAI Z. (1995). Analysis of the Non-Viscous Flow Effect in Liquid Molding Process. J. of Composites Materials, vol. 29, No. 2, pp. 257-278.

CAI Z. et GUTOWSKI T. G. (1992). The 3D Deformation Behavior of A Lubricated Fiber Bundle. Journal of Composite Materials, vol. 26, No. 8, pp 1207-1237.

CHIBANI M. (1990). Modélisation du Procédé de Moulage par Transfert de Résine. Thèse de Philosophie Doctor, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

CHRISTIAN J. T. et BOEHMER J. W. (1970). Plane Strain Consolidation by Finite Elements. J. of Soil Mechanics and Foundations Division- Pro. of the ASCE, July, pp. 1435-1457.

CHRISTIAN J. T., BOEHMER J. W. et MARTIN P. P. (1972). Consolidation of a Layer Under a Strip Load. J. of Soil Mechanics and Foundations Division- Pro. of the ASCE, July, pp. 693-707.

CLERK P. (1994). Étude de Compressibilité et de Perméabilité de Tissus et Rédaction de Guides de Travail. Mémoire de Maîtrise en Ingénierie, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

COOK R. D, MALKUS D.S. et PLESHA M. E. (1989). Concepts and Applications of Finite element Analysis. John Wiley & Sons, Third Edition, 630 pages.

COUSSY O. (1991). Mécanique des Milieux Poreux. Édition Technip, 437 pages.

DARCY H. (1856). Les Fontaines Publics de la Ville de Dijon. Dalmont, Paris.

DAVE R., KARDOS J. L. et DUDUKOVIC M. P. (1987). A Model for Resin Flow During Composite Processing: 1: General Mathematical Development. Polymer Composites, February, vol. 8, No. 1, pp. 29-38.

DAVE R., KARDOS J. L. et DUDUKOVIC M. P. (1987). A Model for Resin Flow During Composite Processing: 2: Numerical Analysis for Unidirectional Graphite/Epoxy Laminates. Polymer Composite, April, vol. 8, No. 2, pp.123-132.

DHATT G., GAO D. M. et CHEIKH A. B. (1990). A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pp.821-831.

DIALLO, M. L., GAUVIN R. et TROCHU F. (1997). Key Factors Affecting the Permeability Measurement in Continuous Fiber Reinforcements. Proceeding of ICCM-11, Gold Coast, Australia, 14-18 July 1997, vol. 4, pp. 441-451.

DRAKE R. et MANORANJAN V. S. (1996). A Method of Dynamic Mesh Adaptation. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, pp. 939-949.

DULLIEN F. A. L. (1979). Porous Media-Fluid Transport and Pore Structure. Academic Press, 396 pages.

DULLIEN F. A. L. et AZZAM M. I. S. (1973). Flow Rate-Pressure Gradient Measurement in Periodically Nonuniform Capillary Tubes. AICHE Journal, March, vol. 19, No.2, pp. 222-229.

DURLOFSKY L. et BRADY J. F. (1987). Analysis of the Brinkman Equation as a Model for Flow in Porous Media. Phys. Fluids, vol. 30, pp. 3329-3341.

FERLAND P. (1994). Simulation Numérique Non Isotherme du Procédé de Moulage par Transfert de Résine. Mémoire de Maîtrise ès Sciences Appliquées, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

FERLAND P., GUITTARD D. et TROCHU F. (1994). Concurrent Methods for Permeability Measurement in Resin Transfer Molding. Polymer Composites, vol. 17, No. 1, pp.149-158.

FERLAND P. et TROCHU F. (1995). A Few Words About Porosity and Darcy's Law. RTMFLOT Bulletin, No. 2, November.

FLORYAN J. M. et RASMUSSEN H. (1989). Numerical Methods for Viscous Flows with Moving Boundaries. Appl. Mech. Rev., vol. 42, No. 12, Dec, pp. 323-341.

GAUVIN R. et CHIBANI M. (1988). Modelization of the Clamping Force and Mold Filling in Resin Transfer Molding. 43rd Annual Conference, Composites Institute, The Society of the Plastic Industry, inc. February 1-5, Session 22-C, pp 1-4.

GAUVIN R., CHIBANI M. et LAFONTAINE P. (1986). The Modelling of Pressure Distribution in Resin Transfer Molding. 41st Annual Conference, Reinforced Plastic/Composites Institute, The Society Industry, inc. January 27-31, Session 19-B, pp. 1-5

GAUVIN R., LEMENN Y., CLERK P. et TROCHU F. (1994). Compaction and Creep Behavior of Glass Reinforcements for Liquid Composites Molding. 10th ASM/ESD Advanced Composites Conference, June, pp. 357-367.

GAUVIN R., TROCHU F., LEMENN Y. et DIALLO L. (1996). Permeability Measurement and Flow Simulation Through Fiber Reinforcement. Polymer Composites, February, vol. 17, No.1, pp. 34-42.

GERMAIN P. (1962). Mécanique des Milieux Continus. Masson Et Cie, Éditeurs, 1962, 412 pages.

GREVE B. N. et SOH S. K. (1990). Directional Permeability Measurement of Fiberglass Reinforcements. SAE Transactions, vol. 99, pp. 331-343.

GUTOWSKI T. G. (1985). A Resin Flow/Fiber Deformation Model for Composites. SAMPE Quartely, July, vol. 16, No. 4, pp. 58-64.

GUTOWSKI T.G., CAI Z., BAUER S., BOUCHER D., KINGERY J. et WINEMAN S. (1986). Resin Flow/Fiber Deformation Experiments. SAMPE Quartely, July, vol. 17, No.4, pp. 54-58.

GUTOWSKI T.G., CAI Z., BAUER S., BOUCHER D., KINGERY J. et WINEMAN S. (1987). Consolidation Experiments for Laminates Composites. Journal of Composites Materials, July, vol. 21, pp. 650-669.

GUTOWSKI T.G., KINGERY J. et BOUCHER D. (1986). Experiments in Composites Consolidation: Fiber Deformation. ANTEC 86, pp. 1316-1320.

GUTOWSKI T.G., MORIGAKI T. et CAI Z. (1987). The Consolidation of Laminate Composites. Journal of Composites Materials, February, vol. 21, pp. 172-188.

HAMMAMI A. (1996). Étude Expérimentale et Modélisations des Perturbations de l'Écoulement pour le Procédé de Moulage par Transfert de Résine. Thèse de Philosophie Doctor, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

HAMMAMI A, GAUVIN R. et TROCHU F. (1998). Modelling the Edge Effect in Liquid Composites Molding. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, vol. 29A, pp. 603-609.

HAMMAMI A, GAUVIN R., TROCHU F., TOURET O. et FERLAND P. (1998). Analysis of the Edge Effect on Flow Patterns in Liquid Composites Molding. Journal of Applied Composites Materials, vol. 5, pp. 161-173.

HAN K., LEE J. L. et LIOU M. (1993). Fiber Mat Deformation in Liquid Composites Molding. II: Modeling. Polymer Composites, April, vol 14, No.2, pp. 151-160.

HAN K., TREVINO L., LEE J. L. et LIOU M. (1993). Fiber Mat Deformation in Liquid Composites Molding. I: Experimental Analysis. Polymer Composites, April, vol 14, No.2, pp. 144-150.

HOUBERT A. (1957). Éléments de Mécanique des Fluides dans les Milieux Poreux. Société Des Éditions Technip, Paris, 231 pages.

HWANG C. T. (1971). Morgenstern N. R., et Murray D. W., « On Solutions of Plane Stain Consolidation Problems by Finite Element Methods. Canadian Geotechnical Journal, vol. 8, No. 109, pp. 109-118.

IKEGAWA N., HAMADA H. et MAEKAWA Z. (1996). Effect of Compression Process on Void Behavior in Structural Resin Transfer Molding. Polymer Engineering and Science, Mid-April, vol. 36, No.7, pp. 953-962.

IRMAY S. (1958). On the Theoretical Derivation of Darcy and Forchheimer Formulas Trans. Am. Geophys. Vol. 1., No. 39, pp. 702-707.

JONSSON K. A. S. et JONSSON B. T. L. (1992). Fluid Flow in Compressible Porous Media : I. Steady-State Conditions. AIChE Journal, Sept, vol 38, No.9, pp. 1340-1348.

JONSSON K. A. S. et JONSSON B. T. L. (1992). Fluid Flow in Compressible Porous Media : II. Dynamic Behavior. AIChE Journal, Sept, vol. 38, No.9, pp. 1349-1356.

KERACHNI A. (1992). Étude de l'Écoulement dans les Multicouches pour le Moulage par Transfert de Résine. Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

KERACHNI A. et GAUVIN R. (1992). Étude Expérimentale de la Compressibilité des Mats pour le Moulage par Transfert de Résine. Technical Report, Ecole Polytechnique de Montréal.

KIM Y.R., McCARTHY P. et FANUCCI J.P. (1991). Compressibility and Relaxation of Fiber Reinforcement During Composites Processing. Polymer Composites, February, vol. 12, No 1, pp. 13-19.

KIM S. et RUSSEL W. B. (1985). Modelling of Porous Media by Renormalization of the Stokes Equations. J. Fluid Mech., vol.154, pp. 269-286.

KOŁODZIEJ J. A. (1998). Influence of the Porosity of a Porous Medium on the Effective Viscosity in Brinkman's Filtration Equation. Acta Mech., vol. 75, pp. 241-254.

KOPLIK J. et LEVINE H. (1983). Viscosity Renormalization in the Brinkman Equation. Phys. Fluids, vol. 26, pp. 2864-2870.

LARSON R. E. et HIGDON J. J. L. (1987). Microscopic Flow Near the Surface of Two-Dimensional Porous Media. Part 1. Axial Flow. J. Fluid Mech., vol.166, pp. 449-472.

LARSON R. E. et HIGDON J. J. L. (1987). Microscopic Flow Near the Surface of Two-Dimensional porous Media. Part 2. Transverse Flow. J. Fluid Mech., vol.178, pp. 119-136.

LEBRUN G. (1995). Étude des Phénomènes d'Échanges Thermiques pour le Moulage par Transfert de Résine. Thèse de Philosophie Doctor, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

LEMMEN Y. (1994). Étude de Compressibilité et de Perméabilité des Renforts Directionnels. Mémoire de maîtrise, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

MAIER R. S., ROHALY T. F., ADVANI S. G. et FICKIE K. D. (1996). A Fast Numerical Method For Isothermal Resin Transfer Mold Filling. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, pp. 1405-1417.

MALLICK P. K. (1993). Fiber Reinforced Composites. Marcel Decker inc., 566 pages.

MARTIN G. Q. et SON J. S. (1986). Fluid Mechanics of Mold Filling for Fiber Reinforced Plastics. Advanced Composites: The Latest Developments, pp. 149-157,

Dearborn, MI, November, ASM-Int.

MORNEAU S. (1995). Étude comparative de méthodes numériques utilisées pour simuler le déplacement de surfaces libres. Thèse de Maîtrise ès Sciences Appliquées, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

MUSKAT M. (1937). The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media. McGraw-Hill, New York.

NEALE G. H. et NADER W. K. (1974). Pratical Significance of Brinkman's Extension of Darcy's Law: Couple Parallel Flows Within a Chanel and a Bounding Porous Medium. Can. J. Chem. Eng., vol. 52, pp. 475-478.

NIELD D. A. (1983). The Boundary Correction for the Rayleigh-Darcy Problem Limitations of the Brinkman Equation. J. Fluid Mech., vol. 128, pp. 37-46.

NIELD D. A. et BEJAN A. (1992). Convection in Porous Media. Springer Verlag Edition. Chapitre 1, pp. 1-19.

PARNAS R.S., SCHULTHEISZ C. R. et RANGANATHAN S. (1995). Hydrodynamically Induced Preform Deformation During High Speed Processing. ACCE 1995, pp. 219-226.

PHAM X-T. et TROCHU F (1998). Simulation of Compression Resin Transfer Molding to Manufacture Thin Composite Shells. Accepted in Polymer Composites.

PHAM X-T., TROCHU F. et GAUVIN R. (1998). Simulation of Compression Resin Transfer Molding with Displacement Control. J. Reinf. Plast. Comp., vol. 17, No. 17, pp. 1525-1556.

PHAM X-T., TROCHU F., REMACLE J-F. et GAUVIN R. (1998). Simulation of Compression Resin Transfer Molding. CADCOMP98 Conference, (August 1998).

PHELAN F. R. (1997). Analysis of Injection/Compression Composite Molding. ICAC97, pp. 417-424.

PHELAN F. R., LEUNG Y. et PARNAS R. S. (1994). Modeling of Microscale Flow in Unidirectional Fibrous Porous Media. J. of Thermoplastic Composite Materials, vol. 7-July, pp. 208-218.

PIECHOWSKI L. J. et KENDALL K.N. (1992). Factors Affecting the Compressibility and Relaxation of Thermoformable Continuous Strand E-Glass Mat. ASM/ESD 8th Annual Conference, November.

REDDY J. N. (1993). An Introduction to the Finite Element Method. McGraw-Hill Inc., Second Edition, 684 pages.

REMACLE J-F. et TROCHU F. (1999). A General Method for the Treatment of Global Constraints in the Finite Element Method. Article à paraître.

RICHARDSON S. (1971). A Model for the Boundary Condition of a Porous Material. Part2. J. Fluid Mech., vol. 49, pp. 327-336.

ROBITAILLE F. et GAUVIN R. (1996). Compaction of Fiber Reinforcements for Composite Manufacturing: A Review of Analytical Results. Technical Report, École Polytechnique De Montréal. EPM/RT-96/19.

ROBITAILLE F. et GAUVIN R. (1996). Measurement of the Compaction and Relaxation Properties of Wet/Dry Textile Reinforcements under Hydrostatic Pressure :

Design of the Apparatus and Data Acquisition. Technical Report, École Polytechnique De Montréal, EPM/RT-96/21.

ROBITAILLE F. et GAUVIN R. (1997). Compaction of Textile Reinforcements for Composite Manufacturing: II. Compaction and Relaxation of Dry and H₂O-Saturated Woven Reinforcements. Accepted in Polym. Compos..

ROBITAILLE F. et GAUVIN R. (1998). Compaction of Textile Reinforcements for Composites Manufacturing. III: Reorganisation of the Fiber Network. À apparaître dans Polymer Composites, 11 pages.

ROBITAILLE F., GAUVIN R. et CLERK P. (1998). Compaction of Textile Reinforcements for Composite Manufacturing: I. A Review of Experimental Results. Polymer Composites, vol. 19, No. 2.

ROSS S. M. (1983). Theoretical Model of the Boundary Conditions at the Fluid-Porous Interface. AIChE J., vol. 29, pp. 840-846.

RUDRAIAH N. (1985). Couple Parallel Flows in a Chanel and a Bounding Porous Medium of Finite Thickness. Trans. ASME, vol. 107, pp. 322-329.

SAFFMAN P. G. (1971). On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium. Stud. Appl. Math., L, pp. 93-101.

SALINGER A. G., ARIS R. et DERBY J. J. (1994). Finite Element Formulation for Large-Scale, Coupled Flows in Adjacent Porous and Open Fluid Domains. Int. J. For Numerical Methods in Fluids, vol. 18, pp. 1185-1209.

SANDHU R. S. (1968). Fluid Flow in Saturated Porous Elastic Media. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 120 pages.

SCHNEEBELI G. (1966). Hydraulique Souterrain. Eyrolles, 362 pages.

SKARTSIS L., KARDOS L. et KHOMANI (1992). Resin Flow Through Fiber Beds During Composite manufacturing Process. Part1: Review of Newtonian Flow Through Fiber Beds. Polym. Eng. Sci., vol. 32, No. 4, pp. 221-239.

SNEIDEGGER A. E. (1974). The Physics of Flow Through Porous Media. Third Edition, University of Toronto Press, 353 pages.

TAYLOR D.W. (1948). Fundamentals of Soil Mechanics. John and Sons, New York, 700 pages.

TAYLOR G. (1971). A Model for the Boundary Condition of a Porous Material. Part1. J. Fluid Mech., vol. 49, pp. 319-326.

TERZAGHI K. (1943). Theoretical Soil Mechanics. John and Sons, New York, 510 pages.

TREVINO L., LEE L.J., RUPEL K. et LIOU M. J. (1990). Permeability and Compressibility Measurements of Fiber Mats in Resin Transfer Molding and SRIM. SPI Conference, February, Session 9E, pp. 1-7.

TREVINO L., RUPEL K., YOUNG W.B., LIOU M. J. et LEE L.J. (1991). Analysis of RIM in Molds with Preplaced Fiber Mats. 1: Permeability and Compressibility Measurements. Polymer Composites, February, vol. 12, No.1, pp. 20-29

TROCHU F., GAUVIN R. et GAO D. M. (1993). Numerical Analysis of the Resin Transfer Moulding Process by the Finite Element Method. Advances in Polymer Technology, vol. 12, No. 4, pp. 329-342.

VAFAI K. et THIYAGARAJA R. (1987). Analysis of Flow and Heat Transfer at the Interface Region of a Porous Medium. Int. J. Heat Transfer, vol.30, No.7, pp. 1391-1405.

WIRTH S. (1995). Compressibility Study of Foam Core During Molding with RTM and SRIM Injection Processes. Rapport de Stage, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

WIRTH S. et GAUVIN R. (1997). Experimental analysis of reinforcement compaction for CRTM. Submitted to Polym. Compos.

WU C-J. et HOURNG L-W. (1995). Permeable Boundary Condition for Numerical Simulation in Resin Transfer Molding. Polymer Engineering and Science, August, vol. 35, No.16, pp. 1272-1281.

WU C. H., WANG T. J. et LEE L. J. (1994). Trans-Plane Fluid Permeability Measurement and Its Applications in Liquid Composite Molding. Polymer Composites, August, vol 15, No.4, pp. 289-298.

YOUNG W.B. et WU S. F. (1995). Permeability Measurement of Bidirectional Woven Glass Fibers. J. of Reinforced Plastics and Composites, vol. 14-October, pp. 1108-1120.

ZHANG Z. (1992). Simulation par Éléments Finis du Remplissage des Moules pour le Procédé RTM. Mémoire de Maîtrise ès Sciences Appliquées, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

ZIENKIEWICZ O. C. et TAYLOR R. L. (1989). The Finite Element Method, Volume1 : Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill Book Company, 648 pages.

ZIENKIEWICZ O. C. et TAYLOR R. L. (1991). The Finite Element Method, Volume2 : Solid and Fluid Mechanics - Dynamics and Non-linearity. McGraw-Hill Book Company, 807 pages.

Annexe I

Consolidation of a deformable saturated fiber reinforcement

In the mechanics of porous medium, the consolidation equations were well studied by Bear (1972), Coussy (1991), and many other authors. A synthetic study about the consolidation theory is presented here in connection with the CRTM process. Let study the resin flow in a deformable fiber bed as shown in Figure I.1.

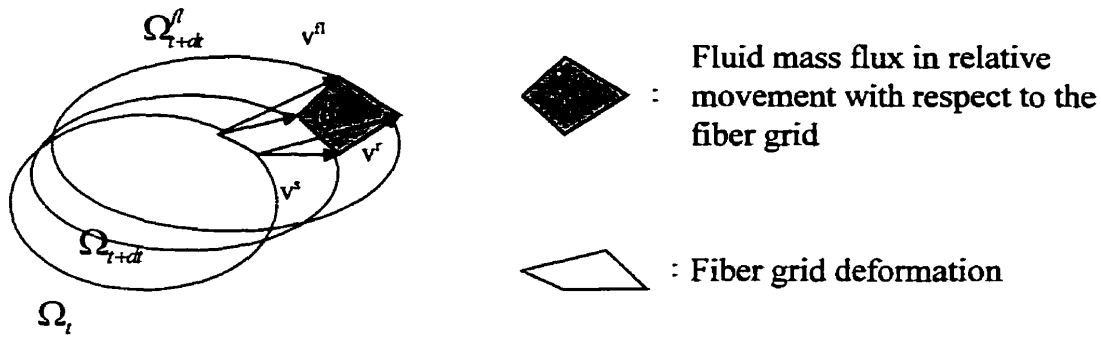


Figure I.1. Schematics of the deformation of a saturated porous medium.

Under the compression, the fiber bed and the resin are deformed, but the total mass remains always constant (Bear, 1972; Coussy, 1991). The porous medium deformation is studied in order to derive the mass conservation equation of the consolidation problem. The motion of the porous medium in the saturated zone is described in Figure I.1 where Ω_t denotes the initial configuration at time t , Ω_{t+dt} the deformed fiber grid volume at time $t+dt$ and Ω_{t+dt}^f the deformed fluid volume at time $t+dt$. In the present configuration, let us consider an infinitesimal surface da , attached to fiber grid particles and oriented by the normal vector \vec{n} . At time t and during an unitary time, the fluid mass going through this elementary surface is

$$J_m^f da = \bar{w} \bar{n} da \quad (I.1)$$

where J_m^f represents the fluid mass flux over an unitary area. The vector $\bar{w}(x,t)$ denotes the relative fluid mass flow rate (with respect to fiber), described in Euler's variables. Let us introduce the relative velocity $\bar{v}^r(x,t)$ of a fluid particle with respect to the fiber grid that coincides with the same geometric point x and at time t . The relation between $\bar{w}(x,t)$ and $\bar{v}^r(x,t)$ is defined by the relation

$$\bar{w} = \rho^f \omega \bar{v}^r \quad (I.2)$$

where $\omega(x,t)$ is the porosity and ρ^f the fluid specific mass at the point considered. If $\bar{v}^s(x,t)$ denotes the velocity of the fiber grid particle and $\bar{v}^f(x,t)$ the absolute velocity of the fluid particle, then Figure I.1 permits to write

$$\bar{v}^f(x,t) = \bar{v}^r(x,t) + \bar{v}^s(x,t) \quad (I.3)$$

First, the fluid mass conservation is defined in Eulerian variables as follows :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^f \omega d\Omega_t + \int_a \bar{w} \bar{n} da = 0 \quad (I.4)$$

and then

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^f \omega) + \text{div}(\rho^f \omega \bar{v}^s + \bar{w}) \right\} d\Omega_t = 0 \quad (I.5)$$

By substituting (I.2) and (I.3) in (I.5), the following equation is obtained :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^f \omega) + \text{div}(\rho^f \omega \bar{v}^f) = 0 \quad (I.6)$$

Second, the fiber grid mass conservation is defined in Eulerian variables by

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^s (1 - \omega) d\Omega_t = 0 \quad (I.7)$$

where ρ^s is the specific mass of solid matter forming the fiber grid. This equation may be written as the following form :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} [\rho^s (1 - \omega)] d\Omega_t + \int_a \rho^s (1 - \omega) \bar{v}^s \bar{n} da = 0 \quad (I.8)$$

then

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho^s (1 - \omega)] + \text{div} [\rho^s (1 - \omega) \bar{v}^s] = 0 \quad (I.9)$$

Finally, the total mass is constant when both equations (I.6) and (I.9) are satisfied at the same time. The fluid and solid phases of the porous medium may be considered incompressible. Therefore, the specific masses ρ^s and ρ^f are constant. Then equations (I.6) and (I.9) become finally

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega) + \text{div} (\omega \bar{v}^f) = 0 \quad (I.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \omega)] + \text{div} [(1 - \omega) \bar{v}^s] = 0 \quad (I.11)$$

By combining these equations, the final equation of total mass conservation (Bear, 1972) may be stated as

$$\text{div} (\omega \bar{v}^f) + \text{div} \bar{v}^s = 0 \quad (I.12)$$

The relative fluid velocity with respect to fiber grid is determined by Darcy's law

$$\bar{v}^f = \frac{K}{\omega \mu} (-\bar{\nabla} p), \quad (I.13)$$

Recall some notations of continuum mechanics. The velocity gradient \mathbf{G} , the deformation rate \mathbf{D} and the rotation rate \mathbf{W} are determined by the following relations :

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mathbf{D}_{ij} + \mathbf{W}_{ij} \quad (I.14)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}^T) \quad (\text{I.15})$$

$$\mathbf{W}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_{ij} - \mathbf{G}_{ji}^T) \quad (\text{I.16})$$

where v_i is the component i of the fiber grid velocity and x_i is the coordinates of the solid particle in the deformed configuration. Then the second term of (I.12) may be developed as follows :

$$\text{div} \bar{\mathbf{v}}^s = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathbf{D}_{ii} = -\frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} \quad (\text{I.17})$$

where dv is the volume elementary at instant t .

It is not difficult to demonstrate relation (I.17). Remember that the deformation gradient is defined by

$$\mathbf{F}_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \quad (\text{I.18})$$

where $d\bar{\mathbf{x}}$ is the incremental position vector in the deformed configuration and $d\bar{\mathbf{X}}$ in the initial configuration. For a volume element, the following relation holds

$$\frac{dv}{dV} = \det(\mathbf{F}_{ik}) = J \quad (\text{I.19})$$

where J is the determinant of the deformation gradient matrix, dv the volume elementary in the deformed configuration and dV the volume elementary in the initial configuration. Therefore, the following relation can be written by noting that \mathbf{F} depends only on \mathbf{X} and t :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dV} \right) = \frac{d}{dt} (\det \mathbf{F}_{ik}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}_{ik}} \frac{\partial \mathbf{F}_{ik}}{\partial t} \quad (\text{I.20})$$

where $\partial J / \partial \mathbf{F}_{ik}$ is the cofactor of \mathbf{F}_{ik} . On the other hand, it is known that

$$\mathbf{F}_{ki}^{-1} = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}_{ik}} \quad (\text{I.21})$$

Hence,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dV} \right) = J \mathbf{F}_{ki}^{-1} \mathbf{G}_{ij} \mathbf{F}_{jk} = J \delta_{ji} \mathbf{G}_{ij} = J \mathbf{G}_{ii} \quad (\text{I.22})$$

Because \mathbf{D} is symmetric and \mathbf{W} antisymmetric, $\mathbf{G}_{ii} = \mathbf{D}_{ii}$. Finally, \mathbf{D} is developed as follows :

$$\mathbf{D}_{ii} = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{dV}{dv} \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dV} \right) = \frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} \quad (\text{I.23})$$

By substituting (I.13) and (I.17) in (I.12), the continuity equation of the resin flow in the deformable reinforcement is obtained :

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \tilde{\nabla} p \right) = -\frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dt} \quad (\text{I.24})$$

Equation (I.24) is called the "general form" of the mass conservation for the consolidation problem. On the other hand, the velocity of a fiber grid particle may be defined by

$$\tilde{\mathbf{v}}^s = \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} \quad (\text{I.25})$$

where $\bar{\mathbf{u}}$ is the displacement vector of the solid particle. If the deformation is infinitesimal, this is may also be written as follows :

$$\text{div } \tilde{\mathbf{v}}^s = \text{div} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\text{div } \bar{\mathbf{u}}) \quad (\text{I.26})$$

By substituting (I.13) and (I.26) in (I.12), the continuity equation takes the following form :

$$\text{div} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \tilde{\nabla} p \right) = -\frac{d}{dt} (\text{div } \bar{\mathbf{u}}) \quad (\text{I.27})$$

It may be verified that when the deformation is infinitesimal, $\text{div}(\bar{u})$ represents the volume dilatation of the fiber grid ε_{vol} defined by

$$\varepsilon_{vol} = \frac{dv - dV}{dV} = \text{div}(\bar{u}) \quad (\text{I.28})$$

where $dv - dV$ is the volume change of the fiber grid and dv, dV are the elementary volumes defined above. Finally, we get

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{d(dv - dV/dV)}{dt} \quad (\text{I.29})$$

so that

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{d\varepsilon_{vol}}{dt} = -\frac{d(dv - dV/dV)}{dt} \quad (\text{I.30})$$

Note that equation (I.24) is always valid even for large deformations of the fiber grid, whereas equation (I.30) may be applied only for small deformations. In fact, for infinitesimal deformation, it is not difficult to show that equations (I.24) and (I.30) are equivalent. The purpose is to find the relation between the volume dilatation rate $\dot{\varepsilon}$ and the deformation rate \mathbf{D} , and then the relation between the displacement gradient \mathbf{f} and the velocity gradient \mathbf{G} . It is known that

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \text{ and } \mathbf{f}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (\text{I.31})$$

then

$$\frac{d\mathbf{f}_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \mathbf{G}_{ik} \cdot \mathbf{F}_{kj} \quad (\text{I.32})$$

For infinitesimal deformation, the following conditions are satisfied :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1, \text{ then } \mathbf{F} \approx \delta$$

where δ denotes the unitary matrix. Finally, we get

$$\frac{df_{ij}}{dt} = G_{ij} \quad (\text{I.33})$$

so we can conclude that

$$\mathbf{D}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \text{ and } \mathbf{W}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} \quad (\text{I.34})$$

This proves that both equations (I.24) and (I.30) are identical when the deformation is infinitesimal. Note that

$$\frac{d\epsilon_{vol}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial \epsilon_{vol}}{\partial t} \quad (\text{I.35})$$

so equation (I.30) takes also another form used by many authors

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{\partial \epsilon_{vol}}{\partial t} \quad (\text{I.36})$$

Annexe II

1D analytical solution of the consolidation problem

In composite manufacturing, in most cases the thickness of the preform is much smaller than its length. The ratio of the thickness over the length is usually smaller than 0.05. The resin pressure gradient through the thickness is considered negligible in front of the longitudinal pressure gradient. Hence the resin flow can be considered as one dimensional through the preform. Let us analyze a CRTM process as depicted in Figure II.1.

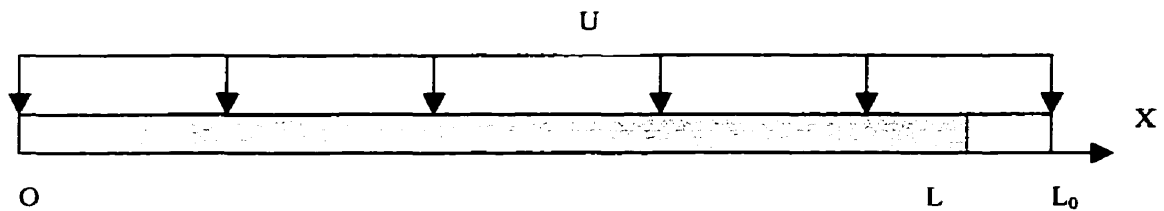


Figure II.1. Schematics of the one-dimensional consolidation problem.

The cavity has the initial dimensions $L_0 \times W \times H$. The initial porosity of the preform is ω_0 . The resin is injected from the left side of the mold during the injection phase. Then, the preform is compressed by the upper part of the mold with a velocity U . The continuity equation can be written as follows :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{K_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{U}{h(t)} \quad (\text{II.1})$$

where K_x is the permeability of the preform in the direction of his length, μ the dynamic viscosity of the resin, p the resin pressure and $h(t)$ the preform thickness at a given time t . Assuming that K_x and μ are not functions of x , the integration of equation (II.1) gives

$$\frac{K_x}{\mu} \frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{U}{h(t)} \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} x + C_0 \quad (\text{II.3})$$

$$p = \frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} x^2 + C_0 x + C_1 \quad (\text{II.4})$$

Let L be the position of the resin front at time t , by substituting the boundary conditions

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ at } x = 0, p = 0 \text{ at } x = L$$

in equations (II.3) and (II.4), we get

$$C_0 = 0 \text{ and } C_1 = -\frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} L^2$$

so

$$p = \frac{1}{2} \frac{U}{h(t)} \frac{\mu}{K_x} (x^2 - L^2) \quad (\text{II.5})$$

Note that when the reinforcement is compressed, U has a negative sign with respect to $h(t)$. The resin pressure distribution takes the shape of a parabola. The position L of the resin front can be calculated as a function of $h(t)$ and $\omega(t)$

$$L = \frac{L_0 \cdot H \cdot (1 - \omega_0) \cdot \omega_f}{h(t) \cdot \omega(t) \cdot (1 - \omega_f)} \quad (\text{II.6})$$

where L_0 , H , ω_0 are defined above, ω_f is the final porosity of the reinforcement at the end of the compression phase, and $h(t)$ and $\omega(t)$ are respectively the thickness and the porosity of the preform at time t . Hence the front position L_i at the end of the injection phase is calculated for $h(t) = H$ and $\omega(t) = \omega_0$ in the following relation :

$$L_i = \frac{L_0 \cdot (1 - \omega_0) \cdot \omega_f}{\omega_0 \cdot (1 - \omega_f)} \quad (\text{II.7})$$

On the other hand, the relation between $h(t)$ and $\omega(t)$ may be obtained from the fiber volume balance

$$h(t) = \frac{(1 - \omega_0) \cdot H}{(1 - \omega(t))} \quad (\text{II.8})$$

or

$$\omega(t) = \frac{h(t) - (1 - \omega_0) \cdot H}{h(t)} \quad (\text{II.9})$$

By substituting (II.8) in (II.6) and (II.9) in (II.6), new relations of L as a function of $\omega(t)$ and $h(t)$ are obtained :

$$L = \frac{L_0 \cdot (1 - \omega(t)) \cdot \omega_f}{(1 - \omega_f) \cdot \omega(t)} \quad (\text{II.10})$$

or

$$L = \frac{L_0 \cdot H \cdot (1 - \omega_0) \cdot \omega_f}{(1 - \omega_f) \cdot (h(t) - (1 - \omega_0) \cdot H)} \quad (\text{II.11})$$

From (II.11), for a given length L , the functions $h(t)$ and $\omega(t)$ are given by

$$h(t) = \frac{L_0 \cdot H \cdot (1 - \omega_0) \cdot \omega_f}{(1 - \omega_f) \cdot L} + (1 - \omega_0) \cdot H \quad (\text{II.12})$$

and

$$\omega(t) = \frac{L_0 \cdot \omega_f}{L_0 \cdot \omega_f + L \cdot (1 - \omega_f)} \quad (\text{II.13})$$

Annexe III

Analysis of the CRTM process in cylindrical coordinates

III.1 Injection-compression model with displacement control

Let us observe the flow of the resin in a circular mold as depicted in Figure III.1. A strand mat is set up in the cavity of the mold. The resin is injected at the radius r_1 and the venting canal is located at the radius r_2 . The continuity equation for the consolidation problem with an isotropic material is as follows:

$$-\frac{K}{\mu} \nabla^2 p = -\frac{U}{h}, \quad (\text{III.1})$$

where U is the compaction speed, K the permeability of the isotropic strand mat, p the resin pressure, h the thickness of the preform and μ the dynamic viscosity of the resin.

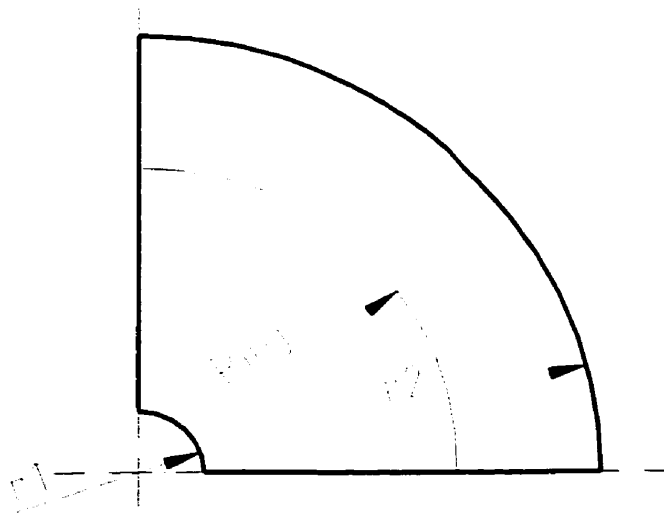


Figure III.1. A circular cavity in cylindrical coordinate system.

III.2 Expression in cylindrical coordinate system

Using the form of the Laplacian in cylindrical polar coordinates (r, ϕ, z) , Laplace's equation is

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (\text{III.2})$$

Restricting ourselves to two-dimensions so that there is no z dependence, and taking account of the circular symmetry (i.e., no dependence on the angular coordinates ϕ), we get

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (\text{III.3})$$

Hence, Equation (III.1) becomes

$$-\frac{K}{\mu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = -\frac{U}{h}. \quad (\text{III.4})$$

Finally, we have

$$\frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{d^2 p}{dr^2} = R, \quad (\text{III.5})$$

with

$$R = \frac{U \mu}{h K}. \quad (\text{III.6})$$

The solution of Equation (III.5) is the following:

$$p = \frac{R}{4} r^2 + A \ln r + B, \quad (\text{III.7})$$

where A and B are two constant numbers depending on the boundary conditions.

III.2.1 Pressure driven injection

If the pressure p_0 is imposed at the injection port of radius r_1 and the pressure at radius r_2 is null, we get the solution of Equation (III.7) for a permanent flow

$$p = \frac{R}{4}(r^2 - r_2^2) + \left[\frac{p_0 - \frac{R}{4}(r_1^2 - r_2^2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \right] \ln\left(\frac{r}{r_2}\right), \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{R}{2}r + \left[\frac{p_0 - \frac{R}{4}(r_1^2 - r_2^2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \right] \frac{1}{r}. \quad (\text{III.9})$$

III.2.2 Flow rate controlled injection

Now, if a flow rate q_0 is imposed at the injection gate of radius r_1 with a cross-sectional area S and the pressure at radius r_2 is null, we have

$$\text{at } r = r_1, \quad \frac{dp}{dr} = \mu \frac{q_0}{S K}, \quad (\text{III.10})$$

$$p = \frac{R}{4}(r^2 - r_2^2) + \left[\frac{2\mu q_0}{\pi h K} - \frac{R}{2}r_1^2 \right] \ln\left(\frac{r}{r_2}\right), \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{R}{2}r + \left[\frac{2\mu q_0}{\pi h K} - \frac{R}{2}r_1^2 \right] \frac{1}{r}. \quad (\text{III.12})$$

III.3 Injection and compression phases

III.3.1 Injection phase

Let us study the transient flow during the injection phase. If at any given time, the flow front is located at radius r , Equation (III.9) gives the expression of the pressure gradient at the flow front as follows:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{p_0}{\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)} \frac{1}{r}. \quad (\text{III.13})$$

Hence, the resin velocity is the following

$$u = -\frac{K}{\mu \omega} \frac{dp}{dr} = -\frac{K}{\mu \omega} \frac{p_0}{\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)} \frac{1}{r}. \quad (\text{III.14})$$

The advancement of the resin front is calculated by

$$dr = u \, dt = -\frac{K}{\mu \omega} \frac{p_0}{\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)} \frac{1}{r} \, dt, \quad (\text{III.15})$$

By integrating Equation (III.15) with the boundary condition $r = r_1$ for $t = 0$, we get the following relation for the filling time:

$$t = -\left[\ln\left(\frac{r_1}{r}\right) \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4}(r^2 - r_1^2) \right] \frac{\omega \mu}{K p_0}. \quad (\text{III.16})$$

We know that the radius of injection R_{inj} is determined from the injected resin volume V_{resin} by

$$R_{inj} = \sqrt{V_{resin} \frac{4}{\pi h_0 \omega} + r_1^2}, \quad (\text{III.17})$$

where h_0 is the thickness of the part. So by substituting Equation (III.17) in Equation (III.16), we obtain the injection time

$$t_{inj} = - \left[\ln \left(\frac{r_1}{R_{inj}} \right) \frac{R_{inj}^2}{2} + \frac{1}{4} (R_{inj}^2 - r_1^2) \right] \frac{\omega \mu}{K p_0}. \quad (\text{III.18})$$

III.3.2 Compression phase

After the injection phase, the resin is compacted with the injection gate closed. The resin flow in this case is determined by Equations (III.11) and (III.12) with null flow rate at the injection port. So we have

$$\frac{dp}{dr} = \frac{R}{2} r - \frac{R}{2} r_1^2 \frac{1}{r}. \quad (\text{III.19})$$

Hence, the resin velocity is the following:

$$u = - \frac{K}{\mu \omega} \frac{dp}{dr} = - \frac{K}{\mu \omega} \frac{R}{2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right). \quad (\text{III.20})$$

The advancement of the resin front is determined by

$$dr = u dt = - \frac{K}{\mu \omega} \frac{dp}{dr} dt = - \frac{K}{\mu \omega} \frac{R}{2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right) dt, \quad (\text{III.21})$$

Then

$$\frac{dr}{\left(r - \frac{r_1^2}{r} \right)} = - \frac{K}{\mu \omega} \frac{R}{2} dt.$$

The compaction time required to fill the mold corresponds to the flow of the resin from radius R_{inj} to radius r_2 and determined from the following relation:

$$\int_{R_{inj}}^{r_2} \frac{dr}{\left(r - \frac{r_1^2}{r}\right)} = \int_0^\tau -\frac{K R}{\mu \omega 2} dt = \int_0^\tau -\frac{1}{2} \frac{|U|}{\omega h} dt = \int_0^\tau -\frac{1}{2} \frac{|U|}{\omega_0 h_0 - |U| t} dt, \quad (\text{III.22})$$

where h and h_0 are the current and initial thickness of the preform, ω and ω_0 are the current and the initial porosity of the reinforcement. By integrating (III.22), we get

$$\ln \left| \frac{r_2^2 - r_1^2}{R_{inj}^2 - r_1^2} \right| = \ln \left| \frac{h_0 \omega_0}{h_0 \omega_0 - |U| \tau} \right|.$$

Finally, we obtain the compaction time to fill the mold as follows:

$$\tau = \frac{h_0 \omega_0}{|U|} \left[1 - \frac{R_{inj}^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (\text{III.23})$$

Annexe IV

Étude de la résolution des équations de la consolidation par la méthode des éléments finis

IV.1 INTRODUCTION

Au sujet du comportement des renforts appliqués dans la fabrication des composites, jusqu'à présent, il existe, dans la littérature, seulement des résultats de tests de compaction dans la direction de l'épaisseur du renfort. Ces résultats sont utiles pour la modélisation de la consolidation dans les pièces de composites minces. Par contre, les équations de la consolidation générale demandent une connaissance du comportement mécanique complet du renfort (bidimensionnel ou tridimensionnel).

Plusieurs types de renforts sont utilisés dans la fabrication des composites tels que les mats, les renforts unidirectionnels, les tissus tissés ou non tissés. D'abord, une analyse est effectuée pour déterminer les paramètres nécessaires décrivant généralement le comportement mécanique des renforts fibreux, particulièrement des tissus. Et puis, en supposant que le comportement du renfort est élastique et déterminé, une méthode numérique de résolution des équations de la consolidation est étudiée. Particulièrement, différents types de conditions aux limites correspondant aux procédés de fabrication des pièces composites par injection et/ou compression sont étudiés. La formulation faible du problème de la consolidation est créée en imposant des conditions aux limites du problème. L'implémentation d'un code de calcul en élément finis est réalisée. Cela permet de faire des simulations numériques des problèmes de la consolidation en question.

L'objectif de cette étude est de simuler la consolidation en petite déformation avec un renfort isotrope ou bien orthotrope avec neuf coefficients indépendants. Cependant, dans un premier temps, faute de connaissance d'un comportement complet du renfort orthotrope, une série de tests numériques avec un matériau isotrope fictif sont réalisés en vue de vérifier si l'imposition des conditions aux limites discutées répond bien à la physique du problème. Des tests numériques montrent que la méthode numérique choisie pour le problème de consolidation ayant lieu dans la fabrication des pièces composites par compression donnent un bon résultat.

IV.2 COMPORTEMENT MÉCANIQUE DU RENFORT

En général, un renfort tissu n'est pas isotrope, mais présente un comportement mécanique anisotrope. Dans la plupart des cas, un tissu a une symétrie reflexe par rapport à chacun de trois plans mutuellement orthogonaux, donc il est orthotrope. Par exemple, un tissu tissé est défini avec des directions perpendiculaires de chaîne, de trame et d'empilement comme indiqué dans la Figure IV.1.

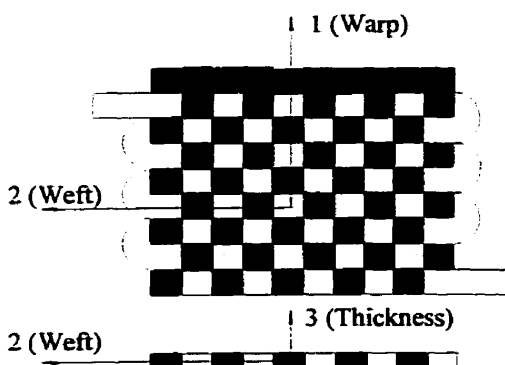


Figure IV.1. Directions du renfort tissu.

Dépendant de l'application, un renfort doit être capable de supporter des charges ou de subir une déformation. Les charges peuvent être dans le plan, mais également perpendiculaires au plan du renfort. La traction et, beaucoup moins, le cisaillement peuvent exister dans le plan du renfort, mais il est impossible de supporter une compression dans son plan, car le renfort en général est très flexible et a une tendance à être instable vis à vis de la compression. On peut voir que pour la structure, un tissu tissé est plus résistant en traction dans son plan qu'un tissu non tissé ou un mat. D'autre part, le renfort tissu peut subir une compression dans l'épaisseur, mais il n'est pas conçu pour supporter une traction dans cette direction ou pour supporter un cisaillement dans la section du renfort tissu.

Dans les procédés de moulage par transfert de résine avec compression ou procédé de vessie, le renfort principalement supporte la compression dans la direction de l'épaisseur. L'effet de membrane est beaucoup plus faible par rapport à la compression dans ces applications. L'objectif est de déterminer le comportement mécanique du renfort.

Observons l'état d'un renfort tissu dans la section comprenant la longueur et l'épaisseur du renfort. Notons que les indices 1, 2 et 3 indiquent respectivement la longueur (chaîne), la largeur (trame) et l'épaisseur du renfort tissu comme présente la Figure IV.1.

Supposons que le renfort est un matériau élastique, la relation contrainte-déformation du matériau orthotrope est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & S_{1313} & 0 \\ & & & & & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

SYM.

où ε_{ij} est la déformation, σ_{ij} la contrainte et S_{ijkl} la matrice de souplesse. Pour simplification, on va utiliser les notations contractées qui réduisent le nombre des indices de la matrice de souplesse de 4 à 2. Puis, l'équation (IV.1) devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & SYM. & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (IV.2)$$

Donc, pour déterminer le comportement d'un renfort tissu, il faut neuf coefficients indépendants. Tandis que l'état de contrainte dans le plan (1, 3) peut être écrite de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & 0 \\ & S_{33} & 0 \\ SYM. & & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} \quad (IV.3)$$

Il y a donc quatre quantités indépendantes qui déterminent le comportement bidimensionnel dans le plan (1, 3).

IV.2 ÉQUATIONS DE LA CONSOLIDATION

La consolidation est gouvernée par les équations suivantes :

- Équation d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0, \quad (\text{IV.4})$$

où σ_{ij} est la contrainte globale, f_i la force volumique et ρ la mass spécifique du milieu.

- Relation des contraintes

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p \delta_{ij}, \quad (\text{IV.5})$$

où σ_{ij} est la contrainte globale, σ'_{ij} la contrainte effective dans le renfort, p la pression de la résine et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

- Loi constitutive du renfort en supposant que celui-ci est un matériau élastique

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (\text{IV.6})$$

où σ'_{ij} la contrainte effective, E_{ijkl} le tenseur de rigidité et ε_{kl} le tenseur de déformation du renfort.

- Loi de Darcy pour l'écoulement de la résine dans le renfort fibreux

$$v_i^r = -\frac{K_{ij}}{\omega \mu} p_{,j}, \quad (\text{IV.7})$$

où v_i^r est la vitesse interstitielle de la résine relative au squelette du renfort, μ la viscosité de la résine, p la pression de la résine, K_{ij} le tenseur de perméabilité et ω la porosité du renfort.

- Équation de continuité

$$\nabla \cdot \left(-\frac{K}{\mu} \bar{\nabla} p \right) = -\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t}. \quad (\text{IV.8})$$

où ε_{vol} est la dilatation volumique du milieu. Référez à l'annexe I pour plus de détails sur l'équation de continuité de la consolidation.

IV.3 CONDITIONS AUX LIMITES

La consolidation du renfort peut s'effectuer par la compression due à une force extérieure via la partie mobile du moule comme dans le procédé CRTM ou la membrane flexible dans le procédé "vessie". Dans ce qui suit, nous allons appeler paroi mobile la surface qui est utilisée pour la compression, que cette surface soit rigide ou flexible. Les conditions aux limites à appliquer à cette surface peuvent être un déplacement rigide, une force globale ou une pression comme le montre la Figure IV.2.

Nous allons discuter particulièrement ici les types de conditions aux limites imposées à la surface du milieu poreux en contact avec les parois mobiles. Dans le premier cas, le renfort est comprimé par une paroi rigide qui est contrôlée par le déplacement. Il est supposé que la paroi mobile est complètement rigide. Donc, le déplacement du renfort est déterminé comme la condition essentielle et la contrainte est inconnue. Tandis que la vitesse de la résine normale à la frontière est nulle et la pression de la résine est inconnue. Alors, il est considéré que (i) le déplacement du renfort est la condition essentielle et (ii) la vitesse normale de la résine est la condition naturelle. Dans le second, le milieu est comprimé par une force globale via aussi une paroi complètement rigide. Il est supposé que la déformation de la paroi mobile est négligeable devant celle du renfort qui est considérée uniforme sur la frontière, mais inconnue. La contrainte du renfort et la pression de la résine sont aussi inconnues, mais la force totale de ces dernières est égale à la force globale appliquée sur la paroi mobile. Ce type de conditions aux limites est appelé contrainte globale dans la méthode des éléments finis. Cette contrainte est considérée au niveau global comme condition naturelle aux limites. Désormais, elle est appelée condition globalement naturelle aux limites. Donc, on a dans ce cas (i) la force globale comme condition globalement naturelle et (ii) la vitesse normale de la résine comme condition naturelle. Dans le troisième, le domaine est comprimé par une pression uniforme sur la surface de la frontière. La force surfacique est déterminée. La somme de la contrainte normale du renfort et de la pression de la résine est égale à la pression

extérieure appliquée sur cette frontière. La contrainte de cisaillement quant à elle est nulle. La pression de la résine et le déplacement du renfort sont inconnus. Et la vitesse normale de la résine sur cette frontière est aussi nulle. Alors, on a (i) la force surfacique comme condition naturelle et (ii) la vitesse normale de la résine comme condition naturelle.

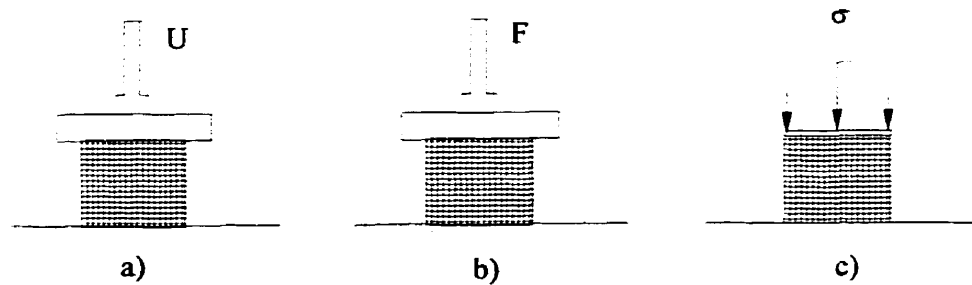


Figure IV.2. Conditions aux limites du problème de la consolidation pendant la compression :

a) déplacement, b) force F , c) pression.

Maintenant, observons un domaine Ω du problème de la consolidation. Sur la frontière de Ω , deux ensembles de conditions aux limites sont considérées tels qu'illustrés sur la Figure IV.3. Le premier ensemble est composé par trois parties complémentaires Γ_u , Γ_T et Γ_g mutuellement exclusives. Le second est aussi composé par trois parties complémentaires Γ_p , Γ_v and Γ_q mutuellement exclusives.

Nous avons les différentes conditions aux limites suivantes :

1. Condition essentielle : le déplacement du renfort $u_i = \bar{u}_i$ sur Γ_u ;
2. Condition naturelle : la force surfacique $T_i = \bar{T}_i = \sigma_{ij} n_j$ sur Γ_T ;
3. Contrainte globalement naturelle : la force globale

$$F_i = \int_{\Gamma_g} T_i d\Gamma \text{ (le déplacement } u_i \text{ est uniforme et inconnu sur } \Gamma_g \text{)};$$

4. Condition essentielle : la pression $p = \bar{p}$ sur Γ_p ;
5. Condition naturelle : la vitesse de la résine normale à la surface $v_i^r n_i = \bar{v}_n$ sur Γ_v ;
6. Contrainte globalement naturelle : le débit de la résine

$$Q = \int_{\Gamma_q} v_i^r n_i d\Gamma \quad (\text{la pression } p \text{ est uniforme et inconnue sur } \Gamma_q).$$

où \bar{n} est le vecteur normal à la surface.

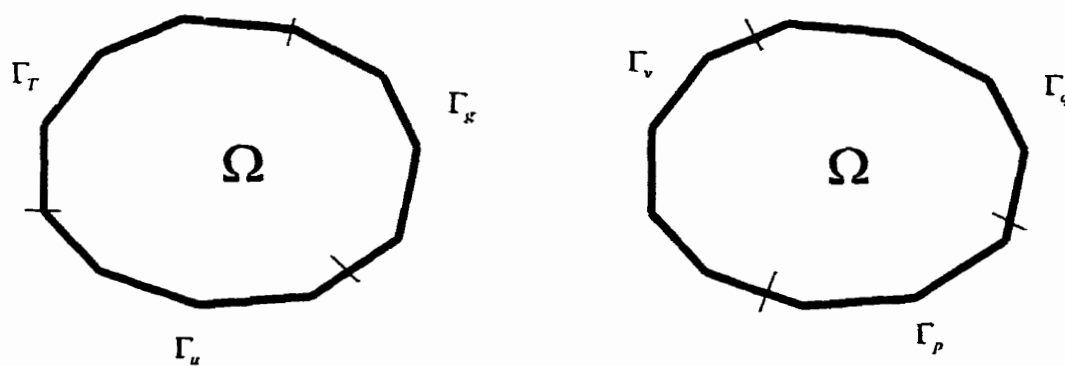


Figure IV.3. Domaine Ω et ses conditions aux limites

$$\partial\Omega_1 = \Gamma_T \cup \Gamma_u \cup \Gamma_g, \quad \partial\Omega_2 = \Gamma_p \cup \Gamma_v \cup \Gamma_q$$

IV.4 FORMULATION VARIATIONNELLE

Il y a deux façons de résoudre les équations de la consolidation. Dans la première, les équations (IV.4) et (IV.8) sont traitées séparément. Christian (1970, 1972) a montré que cette procédure présente l'inconvénient que la solution soit sensible à la taille du maillage à cause de son caractère explicite. La deuxième façon, c'est que l'on aille résoudre les équations (IV.4) et (IV.8) simultanément.

Si \hat{p} et \hat{u} dénotent les fonctions test correspondant respectivement à la pression et le déplacement et Ω le domaine de calcul, la formulation en résidus pondérés du système d'équations est écrite de la façon suivante :

$$\int_{\Omega} \hat{u} (\nabla \cdot \sigma + \rho \bar{f}) d\Omega = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$\int_{\Omega} \hat{p} \left(\nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr}(\nabla \bar{u})) \right) d\Omega = 0 \quad (\text{IV.10})$$

De l'intégration par partie de (IV.9) et (IV.10), les formes faibles du système sont obtenues :

$$\int_{\Omega} \sigma' : \nabla \hat{u} d\Omega + \int_{\Omega} p \text{tr}(\nabla \hat{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{T} \hat{u} d\Gamma \quad (\text{IV.11})$$

$$\int_{\Omega} \hat{p} \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr}(\nabla \bar{u})) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\nabla} \hat{p} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p d\Omega = \int_{\Gamma} -\hat{p} \bar{v}' \bar{n} d\Gamma \quad (\text{IV.12})$$

avec

$$\forall \hat{u} \in \Psi_{\Gamma_u}^1(\Omega) \text{ et } \forall \hat{p} \in \Lambda_{\Gamma_p}^1(\Omega)$$

où

$$\Psi_{\Gamma_u}^1(\Omega) = \left\{ \hat{u} \in H^1(\Omega) \mid \hat{u}|_{\Gamma_u} = 0 \text{ et } \hat{u}(x) = \hat{u}(x'), \forall (x, x') \in \Gamma_g \right\}$$

$$\Lambda_{\Gamma_p}^1(\Omega) = \left\{ \hat{p} \in H^1(\Omega) \mid \hat{p}|_{\Gamma_p} = 0 \text{ et } \hat{p}(x) = \hat{p}(x'), \forall (x, x') \in \Gamma_q \right\}$$

Ici, l'espace de fonction Hilbert est définie comme :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

Finalement, les formes faibles du problème de la consolidation sont les suivantes :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T \hat{u} + \nabla \hat{u}) : E : \frac{1}{2} (\nabla^T u + \nabla u) d\Omega + \int_{\Omega} \text{tr}(\nabla \hat{u}) p d\Omega = \int_{\Gamma_r} \hat{u} \bar{T} d\Gamma + \hat{u} \bar{F} \quad (\text{IV.13})$$

$$\int_{\Omega} \hat{p} \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr}(\nabla \bar{u})) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\nabla} \hat{p} \frac{K}{\mu} \bar{\nabla} p d\Omega = \int_{\Gamma_r} -\hat{p} \bar{v}_n' d\Gamma - \hat{p} Q \quad (\text{IV.14})$$

IV.5 FORMULATION D'ÉLÉMENTS FINIS

Sans perdre la généralité du problème, dans ce paragraphe la formulation bidimensionnelle des éléments finis sera développée. Alors, comme variables nous avons la pression de la résine et le déplacement du renfort avec deux composantes u et v respectivement dans les directions x et y .

IV.5.1 Caractérisation de fonction d'interpolation

Remacle a proposé une façon pour interpoler la pression p , i.e. un potentiel scalaire, quand une contrainte globale se présente. D'abord, un ensemble des nœuds de Ω est composé par deux sous-ensembles complémentaires : le premier, nommé M_q , contient tous les nœuds localisés sur la frontière Γ_q et le second, nommé M_p , contient tous les autres nœuds de Ω de telle sorte que $M_q \cup M_p = M$ et $M_q \cap M_p = \emptyset$. S'il est supposé que la pression p est uniforme sur Γ_p , elle est interpolée à n'importe quel point m du domaine comme ce qui suit :

$$p(m) = \sum_{k \in M_p} p_k S_k(m) + p_q \sum_{k \in M_q} S_k(m), \quad (\text{IV.15})$$

Celui-ci est équivalent à

$$p(m) = \sum_{k \in M_p} p_k S_k(m) + p_q S_q(m) \quad (\text{IV.16})$$

avec

$$S_q(m) = \sum_{k \in M_q} S_k(m) \quad (\text{IV.17})$$

La fonction S_q dans l'équation (IV.16) est la fonction d'interpolation associée à la contrainte globale. Son support n'est plus un nœud, mais un groupe de nœuds. Sa valeur est égale à 1 à tous les nœuds de M_q et 0 à tous les nœuds de M_p .

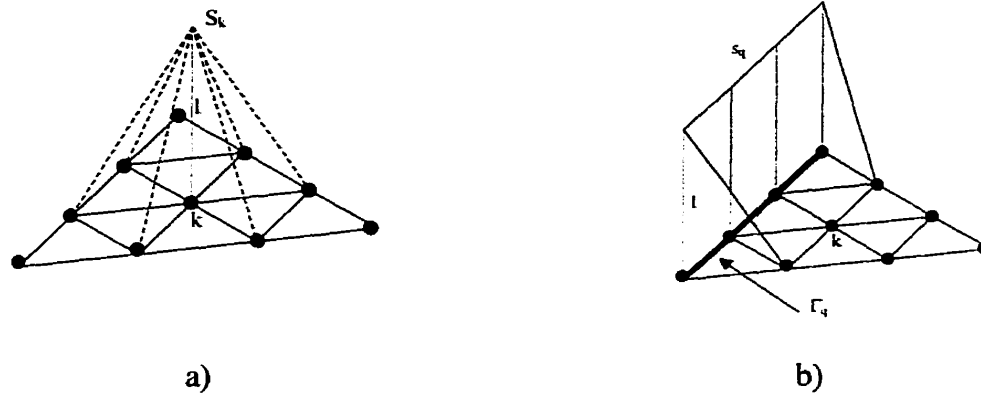


Figure IV.4. (a) Fonction d'interpolation associée au nœud k
(b) Fonction d'interpolation associée à Γ_q .

La fonction d'interpolation pour le déplacement quand la contrainte globale existe peut être obtenue en considérant que chaque composante du déplacement mathématiquement est défini comme un potentiel scalaire. De la même façon, l'ensemble des nœuds de Ω est divisé en deux sous-ensembles complémentaires : le premier nommé L_g , contient tous les nœuds localisés sur la frontière Γ_g et le second, nommé L_u , contient tous les autres nœuds de telle sorte que $L_g \cup L_u = L$ et $L_g \cap L_u = \emptyset$. La composante du déplacement u est observée ici par exemple. Il est supposé que u est uniforme sur Γ_g et il est interpolé à tous les nœuds m du domaine d'après la relation suivante :

$$u(m) = \sum_{n \in L_u} u_n N_n(m) + u_g \sum_{n \in L_g} N_n(m), \quad (\text{IV.18})$$

équivalent à

$$u(m) = \sum_{n \in L_u} u_n N_n(m) + u_g N_g(m) \quad (\text{IV.19})$$

avec

$$N_g(m) = \sum_{n \in L_g} N_n(m) \quad (\text{IV.20})$$

La fonction N_g dans l'équation (IV.19) est la fonction d'interpolation associée à la contrainte globale. Sa valeur est égale à 1 à tous les nœuds de L_g et 0 à tous les nœuds de L_u .

Notons que la fonction d'interpolation pour le déplacement v dans la direction y a la même forme que l'équation (IV.19).

IV.5.2 Discrétisation en espace

Excepté lorsque la contrainte globale existe, les fonctions tests peuvent être choisies comme dans un problème classique d'éléments finis. Les équations d'éléments finis reliées aux fonctions tests S_q et N_g respectivement avec les conditions globalement naturelles: le débit Q , le composant F_x et le composant F_y de la force globale sont présentées :

$$\sum_{n \in L} \left[\int_{\Omega} S_q \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr}(\nabla N_n)) u_n d\Omega \right] + \sum_{k \in M_p} \left[\int_{\Omega} \bar{\nabla} S_q \frac{K}{\mu} \bar{\nabla} S_k p_k d\Omega \right] +$$

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} S_q \frac{K}{\mu} \bar{\nabla} S_q p_q d\Omega = -S_q Q \quad (\text{IV.21a})$$

$$\sum_{n \in L_u} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_n + \nabla N_n) u_n d\Omega \right] +$$

$$\sum_{k \in M} \left[\int_{\Omega} \text{tr}(\nabla N_g) S_k p_k d\Omega \right] + \quad (\text{IV.21b})$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) u_g d\Omega = N_g F_x$$

$$\sum_{n \in L_u} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_n + \nabla N_n) v_n d\Omega \right] +$$

$$\sum_{k \in M} \left[\int_{\Omega} \text{tr}(\nabla N_g) S_k p_k d\Omega \right] + \quad (\text{IV.21c})$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) v_g d\Omega = N_g F_y$$

Comme les fonctions test S_q et N_g sont égales à 1 respectivement sur Γ_q et Γ_g , nous avons :

$$\sum_{n \in L} \left[\int_{\Omega} S_q \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr}(\nabla N_n)) u_n d\Omega \right] + \sum_{k \in M_p} \left[\int_{\Omega} \bar{\nabla} S_q \frac{K}{\mu} \bar{\nabla} S_k p_k d\Omega \right] +$$

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} S_q \frac{K}{\mu} \bar{\nabla} S_q p_q d\Omega = -Q \quad (\text{IV.22a})$$

$$\sum_{n \in L_u} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_n + \nabla N_n) u_n d\Omega \right] + \sum_{k \in M} \left[\int_{\Omega} \mathbf{tr}(\nabla N_g) S_k p_k d\Omega \right] + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) u_g d\Omega = F_x \quad (\text{IV.22b})$$

$$\sum_{n \in L_u} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_n + \nabla N_n) v_n d\Omega \right] + \sum_{k \in M} \left[\int_{\Omega} \mathbf{tr}(\nabla N_g) S_k p_k d\Omega \right] + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) \mathbf{E} \frac{1}{2} (\nabla^T N_g + \nabla N_g) v_g d\Omega = F_y \quad (\text{IV.22c})$$

Si U et P sont le déplacement nodal et la pression nodale, en discrétisant tout le domaine nous obtenons le système d'équations

$$\begin{aligned} R U + C P &= F \\ C^T \dot{U} + G P &= Q \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

où F et Q sont le membre de droite global et R , C , G sont les sous-matrices de la matrice globale du problème de la consolidation.

IV.5.3 Discrétisation en temps

L'approche des résidus pondérés est utilisée pour la discrétisation de temps (Zienkiewicz, 1991). Il est supposé que

$$\begin{aligned} U &= U(\tau) = U_k + \frac{\tau}{\Delta t} (U_{k+1} - U_k) \\ P &= P(\tau) = P_k + \frac{\tau}{\Delta t} (P_{k+1} - P_k) \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

avec

$$\tau = t - t_k \quad (\text{IV.25})$$

En introduisant Θ comme le paramètre pondéré avec W étant le facteur pondéré

$$\Theta = \frac{1}{\Delta t} \frac{\int_0^{\Delta t} W \tau d\tau}{\int_0^{\Delta t} W d\tau}, \quad (\text{IV.26})$$

on a

$$\begin{aligned} R[U_k + \Theta(U_{k+1} - U_k)] + C[U_k + \Theta(U_{k+1} - U_k)] &= \bar{F} \\ \frac{C^T(U_{k+1} - U_k)}{\Delta t} + G[P_k + \Theta(P_{k+1} - P_k)] &= \bar{Q} \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

où

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F_k + \Theta(F_{k+1} - F_k) \\ \bar{Q} &= Q_k + \Theta(Q_{k+1} - Q_k) \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

IV.6 DISCUSSIONS ET CONCLUSION

Comme mentionné ci-dessus, un renfort fictif est utilisé pour tester l'implémentation du code de calcul du problème de la consolidation. Notre objectif est d'analyser les types de conditions aux limites dans les procédés de la fabrication des matériaux composites. Un renfort isotrope ayant la porosité $\omega = 0.5$ et possédant un comportement élastique avec le coefficient de Poisson $\nu = 1E - 05$ est employé pour ces tests numériques. De plus, tous les autres coefficients sont unités tels que la viscosité, la perméabilité, le déplacement imposé pour le cas de Dirichlet, la force surfacique imposée pour le cas de Neumann, la force globale imposée dans le cas de contrainte globale. Et finalement, un carré de dimension unitaire est utilisé.

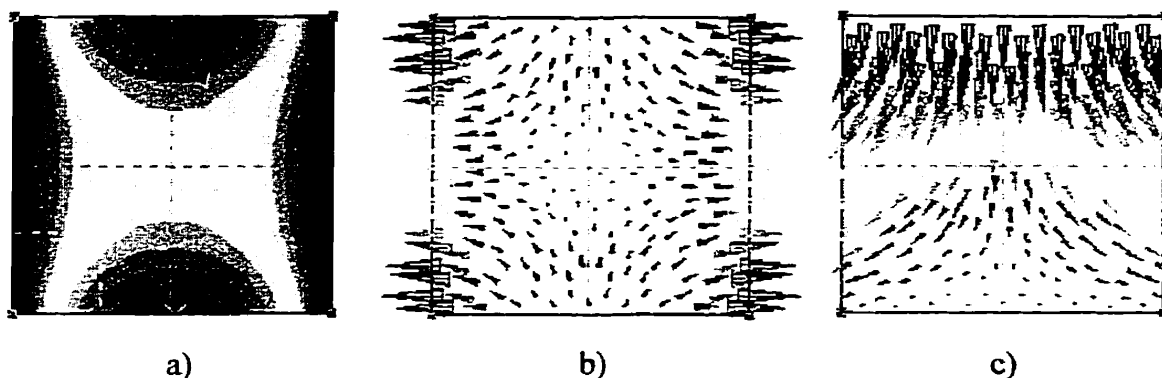


Figure IV.5. Cas de condition de Dirichlet

a) pression de la résine, b) vitesse de la résine et c) déplacement du renfort.

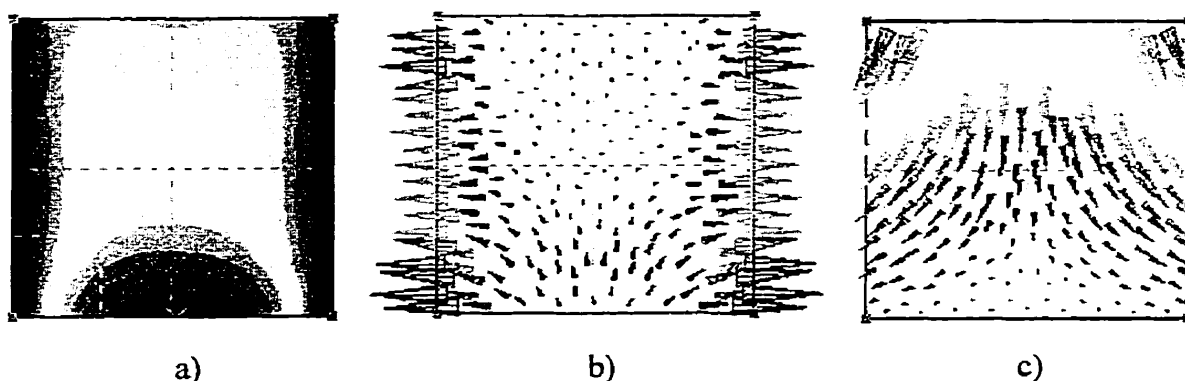


Figure IV.6. Cas de condition de Neumann

a) pression de la résine, b) vitesse de la résine et c) déplacement du renfort.

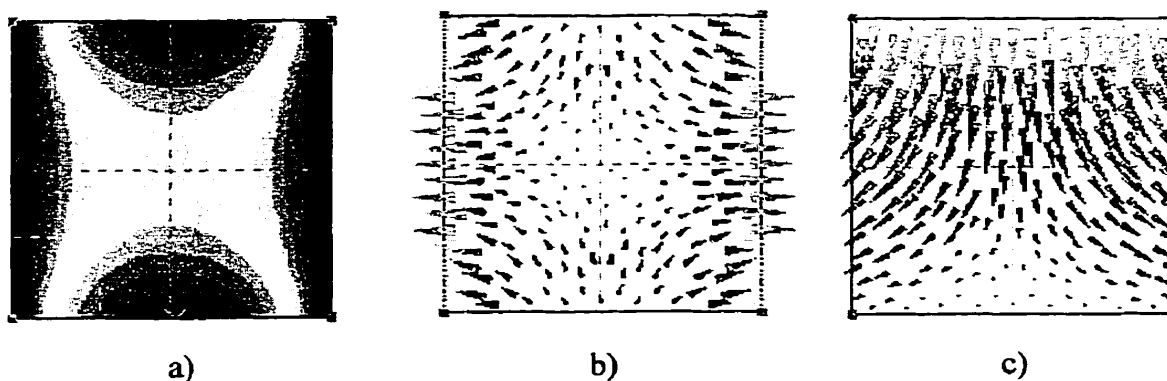


Figure IV.7. Cas de condition de Force Globale

a) pression de la résine, b) vitesse de la résine et c) déplacement du renfort.

Pour tous les simulations, le renfort saturé est comprimé en haut via un mur mobile imperméable. Le côté du bas est aussi une paroi imperméable sur lequel le renfort est fixé, et les deux côtés latéraux sont libres. Figure IV.5 présente la simulation de la consolidation pour le cas de Dirichlet où le renfort saturé est comprimé par une plaque rigide avec un déplacement unitaire imposé en haut. Figure IV.6 illustre la simulation de la consolidation pour le cas de Neumann où renfort saturé est comprimé par une pression unitaire imposée en haut via une membrane flexible. Et finalement, Figure IV.7 présente la simulation de la consolidation pour le cas de contrainte globale où le renfort saturé est comprimé par une plaque rigide avec une force globale unitaire imposée en haut. Effectivement, le premier et le troisième cas correspondent au procédés CRTM et le troisième au procédé de la vessie.

Les résultats sont raisonnables parce qu'ils correspondent bien à la physique du problème. Dans le premier et le troisième cas, le problème est physiquement symétrique au niveau du fluide à travers le plan moyen horizontal. Il en résulte que la distribution de la pression et la vitesse de la résine sont symétriques comme indiquent les Figures IV.5a-b et IV.7a-b. Le fluide circule vers le plan moyen et vers les deux côtés libres latéraux. Comme le gradient de pression aux deux extrémités est plus grand qu'au plan moyen, la vitesse du fluide sortant des deux côtés est également proportionnelle. Par contre, dans le deuxième cas, en haut c'est une condition de contrainte globale et en bas c'est une condition de déplacement fixé. Alors, la distribution de la résine n'est plus symétrique, le gradient de pression pousse le fluide à circuler vers le haut et vers les deux côtés latéraux comme illustrent les Figures IV.6a-b. D'autre part, comme le déplacement du renfort est fixé en bas, dans tous les cas, il reste toujours immobile. Tandis que, en haut pour le premier et le troisième cas, le renfort est comprimé par une plaque rigide, alors le déplacement doit être uniforme comme indiquent les Figure IV.5c et IV.7c. Par contre, pour le deuxième cas, la membrane est flexible, donc dépendant de la pression du fluide, le renfort va se déplacer différemment comme indique la Figure IV.6c. Pour tous les cas, en haut le déplacement n'est pas fixé mais glissant, donc nous voyons que le renfort a une

tendance à se déplacer vers les deux côtés latéraux. Cette tendance est plus forte en haut qu'en bas car le renfort est fixé à la surface inférieure. Une autre remarque, c'est que les résultats obtenus dans le premier et le troisième cas sont similaires, mais ils sont quantitativement différents, tout simplement parce que l'effet d'un déplacement unitaire est différent de celui d'une force globale unitaire.

En conclusion, cette méthode permet de modéliser tous les types de conditions aux limites ayant lieu dans les procédés de la fabrication des composites par compression. La pression, la vitesse du fluide et la déformation du renfort sont bien déterminées. De plus, avec cela l'écoulement transverse du fluide dans l'épaisseur est étudié. Cela indique que l'effet de la perméabilité du renfort dans l'épaisseur joue également un rôle considérable dans cette étude.

Annexe V

Modèle d'écoulement couplé espace libre/milieu poreux

V.1 INTRODUCTION

Dans les procédés de fabrication des pièces composites par injection/compression, nous rencontrons un type particulier d'écoulement du fluide : l'écoulement couplé espace libre/milieu poreux. Il s'agit de l'écoulement de la résine dans un canal libre à l'intérieur d'un moule contenant une préforme.

Par exemple, quand la résine est injectée dans le moule dans le procédé RTM à fort débit, le renfort est déformé. Cela crée un espace libre entre le renfort et le mur du moule (Han et Lee, 1993; Han et Trevino, 1993; Trevino, 1991; Wu, 1994). À partir de ce moment, il existe un écoulement de type couplé espace libre/milieu poreux. Nous observons souvent aussi l'effet de bord lorsque le renfort fibreux n'est pas parfaitement placé dans le moule (Hammami, 1996, 1998). L'écoulement de la résine dans cet espace peut être considéré comme celui de type couplé espace libre/milieu poreux.

Dans cette étude, on va chercher les équations et les conditions nécessaires pour décrire cet écoulement. Puis, la méthode des éléments finis sera appliquée en imposant directement ces conditions aux limites.

V.2 ÉQUATIONS FONDAMENTALES

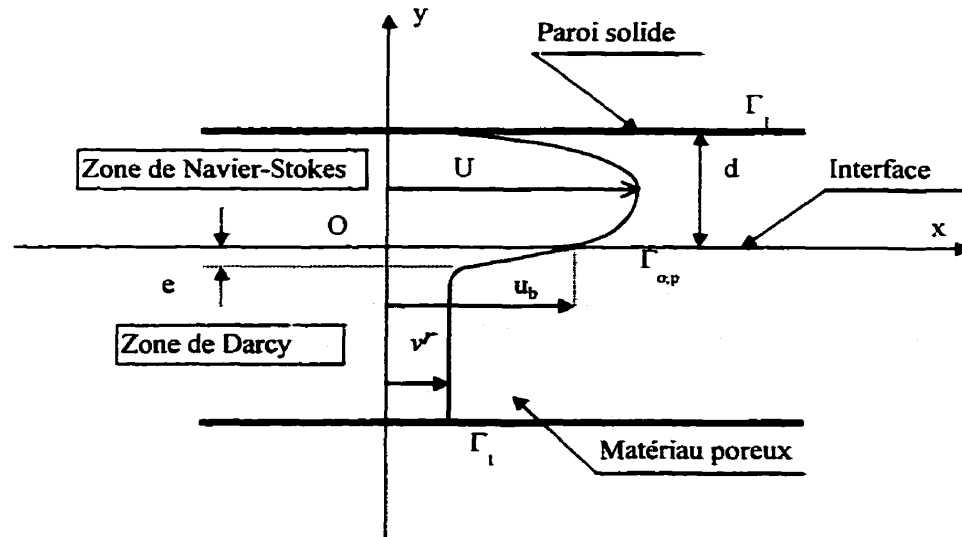


Figure V.1. Écoulement couplé espace libre/milieu poreux.

Observons l'écoulement permanent d'un fluide newtonien incompressible qui s'écoule à travers un milieu couplé espace libre/milieu poreux tel qu'illustré à la Figure V.1. La première approche pour modéliser ce type d'écoulement consiste à utiliser les équations qui gouvernent l'écoulement dans chaque région. L'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans un milieu homogène est représenté par les équations de Navier-Stokes

$$\rho(\bar{\mathbf{u}}_o \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_o) = -\bar{\nabla} p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}_o \quad (\text{V.1a})$$

ou bien sous la forme des contraintes

$$\rho(\bar{\mathbf{u}}_o \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_o) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o \quad (\text{V.1b})$$

avec

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o = -\bar{\nabla} p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{V.2})$$

et l'équation de continuité s'écrit

$$\nabla \cdot \bar{u}_o = 0 \quad (\text{V.3})$$

où \bar{u}_o est la vitesse du fluide dans l'espace libre, μ la viscosité, ρ la densité du fluide, σ_o la contrainte totale, τ la contrainte de cisaillement et p la pression du fluide. L'écoulement dans le milieu poreux est gouverné par la loi de Darcy

$$\bar{v}^r = \frac{K}{\omega \mu} (\nabla \cdot \sigma_p) \quad (\text{V.4})$$

avec $\sigma_p = -p \delta$, donc $\nabla \cdot \sigma_p = -\nabla p$ et l'équation de continuité s'écrit

$$\nabla \cdot (\omega \bar{v}^r) = 0 \quad (\text{V.5})$$

où \bar{v}^r est la vitesse interstitielle, p la pression, μ la viscosité du fluide, K le tenseur de perméabilité et ω la porosité du milieu poreux.

Dans la zone de Navier-Stokes, à la paroi solide Γ_l une condition de non glissement est posée

$$\bar{u}_o = 0 \quad (\text{V.6})$$

dans la zone de Darcy, à la paroi solide Γ_l ayant le vecteur normal \bar{n} , la condition de vitesse normale nulle est posée

$$\bar{v}^r \cdot \bar{n} = 0, \quad (\text{V.7})$$

et à l'interface $\Gamma_{0,p}$ des deux milieux, pour lier les deux zones, on impose trois conditions

- continuité de la contrainte normale

$$\sigma_o \cdot \bar{n} \cdot \bar{n} = \sigma_p \cdot \bar{n} \cdot \bar{n}, \quad (\text{V.8})$$

- continuité du débit du fluide à travers l'interface

$$\omega \bar{v}^r \cdot \bar{n} = \bar{u}_o \cdot \bar{n}, \quad (\text{V.9})$$

- pour décrire le fait que la vitesse du fluide et la contrainte tangente sont discontinues à l'interface, Beavers-Joseph et al. (1967) ont proposé une relation reliant ces deux milieux. Elle est appelée condition de Beavers-Joseph et s'exprime par l'équation suivante :

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0^-} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (\bar{u}_b \bar{t} - \bar{v}' \bar{t}) \quad (\text{V.10})$$

où α est une constante déterminée par expérience, K la perméabilité du milieu poreux dans la direction parallèle à l'interface, \bar{u}_b la vitesse du fluide à l'interface, \bar{v}' la vitesse du fluide dans le milieu poreux, \bar{t} le vecteur tangent à l'interface et du/dy le gradient de la vitesse dans la direction normale à l'interface au point $y = 0$ (voir Figure V.1).

La condition de Beavers-Joseph peut être représentée sous la forme de contrainte par l'équation suivante :

$$\sigma_o \bar{n} \bar{t} = \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (\bar{u}_o \bar{t} - \bar{v}' \bar{t}), \quad (\text{V.11})$$

où σ_o est le tenseur de contrainte dans le domaine de Navier-Stokes, σ_p le tenseur de contrainte dans le domaine de Darcy, μ la viscosité du fluide, \bar{n} et \bar{t} les vecteur normal et tangent à l'interface respectivement, \bar{u}_o et \bar{v}' les vitesses du fluide dans l'espace libre et dans le milieu poreux respectivement.

V.3 FORMULATION VARIATIONNELLE

Afin d'appliquer la méthode des éléments finis, les équations seront écrites sous la forme variationnelle. La forme faible du système de Navier-Stokes est la suivante :

$$\int_{\Omega} \hat{u} \{ \rho (\bar{u}_o \cdot \nabla) \bar{u}_o \} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} (\nabla \cdot \sigma_o) d\Omega, \quad (\text{V.12})$$

$$\int_{\Omega} \hat{q}(\nabla \cdot \bar{u}_o) d\Omega = 0, \quad (V.13)$$

où \hat{u} , \hat{q} sont les fonctions tests pour la vitesse et la pression. En développant (V.12), on obtient

$$\int_{\Omega} \hat{u} \{ \rho (\bar{u}_o \cdot \nabla) \bar{u}_o \} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \hat{u} : \sigma_o d\Omega = \int_{\Gamma^o} \hat{u} \sigma_o \bar{n} dS \quad (V.14)$$

où Ω est le domaine de calcul de l'espace libre et Γ sa frontière. En combinant (V.4) et (V.5) la forme faible de Darcy est décrite par l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla \sigma_p \right) d\Omega = 0 \quad (V.15)$$

ou bien

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) d\Omega = \int_{\Gamma^p} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) \bar{n} dS \quad (V.16)$$

où Ω est le domaine de calcul du milieu poreux et Γ son frontière

V.4 IMPOSITION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'écoulement du fluide dans les deux zones est lié en imposant des conditions aux limites dans les formes faibles des équations de Navier-Stokes et de Darcy. Sur la frontière du domaine de Navier-Stokes, il y a trois zones : Γ_1^o est la partie où l'on impose une vitesse nulle, Γ_0^o est la partie où l'on impose une force surfacique quelconque et $\Gamma_{0,p}$ est la partie appartenant à l'interface entre les deux milieux (voir Figure V.2).

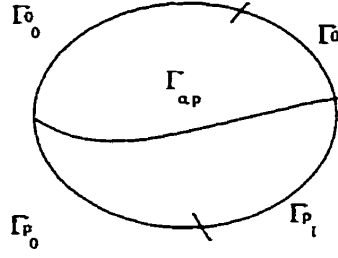


Figure V.2. Frontière du domaine de calcul.

La fonction test \hat{u} est égale à zéro sur Γ_1^0 . Alors, le terme droit de (V.14) est développé comme l'équation suivante :

$$\int_{\Gamma^0} \hat{u} \sigma_o \bar{n} dS = \int_{\Gamma_o^0} \hat{u} \sigma_o \bar{n} dS + \int_{\Gamma_{o,p}} \hat{u} \sigma_o \bar{n} dS \quad (V.17)$$

avec

$$\int_{\Gamma_{o,p}} \hat{u} \sigma_o \bar{n} dS = \int_{\Gamma_{o,p}} \left\{ (\hat{u} \bar{n})(\sigma_o \bar{n} \bar{n}) + (\hat{u} \bar{t})(\sigma_o \bar{n} \bar{t}) \right\} dS \quad (V.18)$$

Remplaçons (V.8) et (V.11) dans (V.18), alors (V.18) devient

$$\int_{\Gamma_{o,p}} \hat{u} \sigma_o \bar{n} dS = \int_{\Gamma_{o,p}} \left\{ (\hat{u} \bar{n})(\sigma_p \bar{n} \bar{n}) + (\hat{u} \bar{t}) \frac{\mu \alpha}{\sqrt{k}} (\bar{u}_o \bar{t} - \bar{v}^r \bar{t}) \right\} dS \quad (V.19)$$

Par l'équation (V.19), la condition de continuité de la contrainte normale et la condition de Beavers-Joseph sont imposées à l'interface des deux milieux. Or, on sait que

$$(\hat{u} \bar{n})(\sigma_p \bar{n} \bar{n}) = (\hat{u} \bar{n})(-p_p \delta_{ij} n_j n_i) = -p_p \hat{u} \bar{n}$$

Alors, l'équation (V.19) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma_{o,p}} \hat{u} \sigma_o \bar{n} dS = \int_{\Gamma_{o,p}} \left\{ (-p_p \hat{u} \bar{n}) + (\hat{u} \bar{t}) \frac{\mu \alpha}{\sqrt{k}} (\bar{u}_o \bar{t} - \bar{v}^r \bar{t}) \right\} dS \quad (V.20)$$

On distingue également trois zones sur la frontière du domaine de Darcy : Γ_1^p est la partie où on impose une pression donnée, Γ_0^p est la partie où on impose une vitesse normale quelconque et $\Gamma_{0,p}$ est la partie appartenant à l'interface des deux milieux (voir Figure V.2). Alors, le terme droit de l'équation (V.16) est développé comme suit :

$$\int_{\Gamma^p} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) \bar{\mathbf{n}} dS = \int_{\Gamma_0^p} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{\Gamma_{0,p}} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) \bar{\mathbf{n}} dS \quad (\text{V.21})$$

avec

$$\int_{\Gamma_{0,p}} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) \bar{\mathbf{n}} dS = \int_{\Gamma_{0,p}} \hat{p} \omega \bar{\mathbf{v}}^r \bar{\mathbf{n}} dS = \int_{\Gamma_{0,p}} \hat{p} \bar{\mathbf{u}}_o \bar{\mathbf{n}} dS \quad (\text{V.22})$$

Alors, la condition de continuité du débit (V.9) est imposée aussi à l'interface des deux milieux.

Finalement, après avoir imposé les conditions aux limites dans les formes faibles des équations de Navier-Stokes et de Darcy, on obtient un système d'équation décrivant l'écoulement du fluide dans le milieu couplé espace libre/milieu poreux comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} \{ \rho (\bar{\mathbf{u}}_o \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_o \} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma}_o d\Omega = \\ \int_{\Gamma_0^d} \hat{\mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}_o \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{\Gamma_{0,p}} \left\{ (-p_p \hat{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{n}}) + (\hat{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{t}}) \frac{\mu \alpha}{\sqrt{k}} (\bar{\mathbf{u}}_o \bar{\mathbf{t}} - \bar{\mathbf{v}}^r \bar{\mathbf{t}}) \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{V.23a})$$

$$\int_{\Omega} \hat{q} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_o) d\Omega = 0 \quad (\text{V.23b})$$

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) d\Omega = \int_{\Gamma_0^p} \hat{p} \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \bar{\nabla} p_p \right) \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{\Gamma_{0,p}} \hat{p} \bar{\mathbf{u}}_o \bar{\mathbf{n}} dS \quad (\text{V.23c})$$

V.5 CONCLUSION

L'écoulement du fluide dans un milieu couplé espace libre/milieu poreux est gouverné d'une part par les équations fondamentales dans chaque zone (Navier-Stokes et Darcy), et d'autre part par des conditions particulières à l'interface reliant ces deux zones. La formulation variationnelle des équations permet d'imposer directement les conditions aux limites et à l'interface comme des conditions naturelles. Alors, cet écoulement en régime permanent sur tout le domaine couplé peut être résolu par la méthode des éléments finis. En réalité, l'écoulement de la résine dans un moule est un phénomène non permanent. Cependant, on peut considérer qu'à un instant donné dans la zone saturée, l'écoulement de la résine est quasi-stationnaire et donc le problème peut être traité par la méthode proposée. Puis l'avancement du fluide sur un maillage fixe sera déterminé à l'aide d'un algorithme de remplissage.